

Время выполнения задания 240 минут. Каждая задача оценивается в 10 баллов.

1. Привести пример двух отношений R_1 и R_2 на множестве натуральных чисел, таких что R_1 и R_2 не являются транзитивными, а их композиция $R_1 \cdot R_2$ является транзитивным отношением.

2. Граф «волейбольная сетка» состоит из m рядов по n вершин в каждом. Соединены только соседние вершины в ряду или столбце. При каких m и n этот граф будет а) двудольным; б) содержать гамильтонов цикл?

3. Рассмотрим полный граф на n вершинах. Предположим, что на каждом ребре так выбрана ориентация, что в каждую вершину входит одинаковое число ребер. При каких значениях n это возможно?

4. Сколько существует номеров российских паспортов, начинающихся на 45 08, в которых встречается 53? (Считаем, что возможны все номера паспортов.)

5. Вычислите 2014-ю производную функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ в точке $x = 0$.

6. При каких значениях параметров a и b выполнено равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin ax} - \cos x}{x^b} = \frac{1}{2} ?$$

7. Известно, что случайная величина ξ принимает только натуральные значения и

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}.$$

Найти: а) неизвестную константу c ; б) математическое ожидание случайной величины ξ .

8. В четырехмерном евклидовом пространстве привести пример трех двумерных плоскостей, из которых любые две пересекаются только по нулевому вектору.

9. Дано множество всех двоичных векторов длины n . Расположить элементы этого множества в последовательность так, чтобы соседние отличались только в одной координате.

10. В наличии имеются одинаковые камни трех цветов. Сколько различных ожерелий можно собрать из 12 камней? (Ожерелье определяется расположением элементов по окружности. Сдвиг вдоль окружности и отражение дают то же ожерелье.)