

Время выполнения задания 240 минут.

От Вас требуются полные решения задач. Каждая задача оценивается в 20 баллов. В зачет идут 5 лучших решений.

1. На множестве  $\{a, b, c, d, e, f\}$  определено бинарное отношение  $P$ . Можно ли представить  $P$  в виде пересечения нескольких строгих линейных порядков, если  
а)  $P = \{(a, b), (c, d)\}$ ; б)  $P = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$ ; в)  $P = \{(a, b), (a, e), (b, e), (c, e), (c, f)\}$ .

2. Граф "волейбольная сетка" состоит из  $m$  рядов по  $n$  вершин в каждом. Соединены только соседние вершины в ряду или столбце. При каких  $m$  и  $n$  этот граф будет а) двудольным; б) содержать гамильтонов цикл?

3. Сколько существует номеров Российских паспортов, начинающихся на 45 08, в которых встречается 53? (считаем, что возможны все номера паспортов, хотя на самом деле это не верно).

4. Вычислите 2014-ую производную функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  в точке  $x = 0$ .

5. При каких  $\alpha$  и  $\beta$  выполнено равенство  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin \alpha x} - \cos x}{x^\beta} = 3$ ?

6. Известно, что случайная величина  $\xi$  принимает только натуральные значения и  $P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$ . Найдите а) неизвестную константу  $c$ ; б) математическое ожидание случайной величины  $\xi$ .

7. Автомат расфасовывает большую партию чая по пакетам. Предполагается, что вес пакета адекватно описывается гауссовским распределением. Случайным образом выбрали 6 пакетов чая. Вес этих пакетов составил 99, 102, 103, 96, 98, 95 граммов.

а) Можно ли на уровне значимости 0,05 принять гипотезу о том, что в среднем вес пакета составляет 100 гр.?

б) Постройте доверительный интервал уровня надежности 0.9 для дисперсии веса пакета чая, считая, что истинное среднее веса пакета совпадает с номинальным весом 100 грамм.

8. Пусть  $M$  и  $N$  — два 4-мерных подпространства в  $\mathbb{R}^6$ . Докажите, что  $S = M \cap N$  можно представить, как множество решений некоторой системы из  $n$  линейных уравнений (от 6 неизвестных). Каким может быть число  $n$ ?

9. Найдите все такие значения параметров  $x$  и  $y$ , что матрица  $A^{2014}$  нулевая, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & x \end{pmatrix}.$$

10. Найдите решение задачи Коши  $y'' + py' + qy = f(x)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ , действительные числа  $p$  и  $q$  и функцию  $f(x)$ , если известно, что уравнение  $y'' + py' + qy = f(x)$  имеет частные решения  $e^{-x} + \sin x$  и  $xe^{-x} + \sin x$ .