Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2014 г.

Направление «Прикладная математика и информатика»

КОД - 112

Профиль «Математические методы естествознания и компьютерные технологии»

Время выполнения — 180 мин.

I. Решите задачи.

1. Найти гладкие решения нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\gamma\,|u|^2\,u=0$$

вида $u(x,t)=e^{i\alpha t}v(x),$ где $v(x)>0,$ удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x,t)=0$.

Здесь $\gamma>0,\ \alpha\geq 0$ — константы.

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u, & 0<x<2,\ t>0,\\ u(0,t)=2t, & u(2,t)=0,\\ u(x,0)=0, & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.\end{cases}$$

3. Пусть $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots\geq 0$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

сходится в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\ldots$$

4. Обозначим через $H(x)$ функцию Хевисайда

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Доказать, что для любой непрерывной функции $f(x)$ и любых $a,b\in\mathbf{R}$ справедливо равенство $f\left(a+bH(x)\right)=A+BH(x)$ и вычислить A и B.

5. Найти два первых члена асимптотического разложения корня уравнения

$$1-\sin x=nx,$$

при $n\to+\infty$.