Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2014 г.
Направление «Математика»

Профили:

«Математика»	**код – 120**
«Математическая физика»	**код – 121**

Время выполения задания — 240 минут

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. Пусть векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ представлено в виде объединения последовательности подпространств V_n, $n \in \mathbb{N}$ (не обязательно вложенных друг в друга). Докажите, что всякое конечномерное подпространство V содержится в V_n для некоторого n.

1. Assume that a vector space V over the field $\mathbb{R}$ is a union of a sequence of subspaces V_n, $n \in \mathbb{N}$ (not necessarily included into each other). Show that any finite-dimensional subspace of V is contained in V_n for some n.

2. Напомним, что для векторного поля $v = (v_1, v_2, v_3)$ в $\mathbb{R}^3$ его *дивергенция* определяется как функция $\operatorname{div}(v) = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ даны гладкое векторное поле v и гладкая функция f. Докажите, что для каждой точки $\mathbb{R}^3$, в которой v не обращается в ноль, найдётся такая система координат в некоторой её окрестности U, что $\operatorname{div}(v) = f$ в U.

2. Recall that for a vector field $v = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$ its *divergence* is defined by $\operatorname{div}(v) = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3$.

Suppose we are given a smooth vector filed v and a smooth function f in $\mathbb{R}^3$. Show that for any point in $\mathbb{R}^3$, where v does not vanish, there exists a coordinate system in some neighbourhood of it such that $\operatorname{div}(v) = f$ in U.

3. Докажите, что для всякого $R > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что многочлен

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

не обращается в ноль в диске $|z| < R$, $z \in \mathbb{C}$.

3. Show that for any $R > 0$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that the polynomial

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

has no zeroes in the disc $|z| < R$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Докажите, что для любых вещественных $\varepsilon, \delta > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для $n > N$ вероятность того, что скалярное произведение двух равномерно распределённых независимых случайных векторов на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ больше ε, меньше δ.

4. Show that for any real numbers $\varepsilon, \delta > 0$ there exists $N \in \mathbb{N}$ such that for $n > N$ the probability, that the scalar product of two uniformly distributed independent random vectors on a unit sphere in $\mathbb{R}^n$ is greater than ε, is less than δ.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Блок 1. «Математика»

1. Постройте хаусдорфово топологическое пространство X, не гомеоморфное $\mathbb{R}$, для которого существует непрерывное биективное отображение $\mathbb{R} \to X$.

1. Give an example of a Hausdorff topological space X not homeomorphic to $\mathbb{R}$ such that there exists a continuous bijective map $\mathbb{R} \to X$.

2. Найдите
a) двузначное n,
b) трёхзначное n,
c) рекуррентную формулу для нахождения всех $n \in \mathbb{N}$,
для которых найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, $1 < m < n$, что $1+2+\cdots+m = (m+1)+(m+2)+\cdots+n$.

2. Find a
a) two-digit integer n,
b) three-digit integer n,
c) a recurrence formula for finding all $n \in \mathbb{N}$
such that there exists $m \in \mathbb{N}$ with $1 < m < n$ and $1+2+\cdots+m = (m+1)+(m+2)+\cdots+n$.

Блок 2. «Математическая физика»

1. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин массы M, наклонная грань которого образует угол α с горизонтом. На поверхности наклонной грани на высоте h от основания клина находится небольшое тело массы m. В начальный момент вся система находится в покое. Затем тело m начинает скользить вниз по наколонной грани клина под действием силы тяжести. Трение между телом и клином и между клином и горизонтальной поверхностью пренебрежимо мало. Определите:
   а) Максимальную высоту относительно горизонтальной поверхности, на которую поднимется тело m после упругого удара об эту поверхность.
   б) Расстояние, которое пролетит тело m между двумя последовательными ударами о горизонтальную поверхность.

2. Проводящей сфере с внешним радиусом R и внутренним радиусом r сообщен электрический заряд q. Сфера разрезана двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через ее центр, на четыре равные части. Определите:
   а) Величину электростатической силы, которая действует на каждую из четырех частей.
   б) Возможно ли удержать части сферы от разлета, поместив в ее центр точечный электрический заряд? Ответ необходимо обосновать и, в случае положительного ответа, найти величину требующегося точечного заряда.