Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2014 г.

«Прикладная математика и информатика»

«Математические методы естествознания и компьютерные технологии»

Время выполнения — 180 мин.

I. Решение задач.

1. Дифференцируя, имеем $-\alpha e^{i\alpha t}v(x)+e^{i\alpha t}v''(x)+\gamma e^{i\alpha t}v^3(x)=0.$ Умножая это равенство на $2v'(x)$ и интегрируя, получаем $(v'(x))^2-\alpha v^2(x)+\dfrac{\gamma}{2}v^4(x)=E.$

В силу условий на $\pm\infty$ константа $E=0.$ Поэтому $\dfrac{dv}{dx}=\pm\sqrt{\alpha v^2-\dfrac{\gamma}{2}v^4}$. Пусть x_0— точка, где $\dfrac{dv}{dx}(x_0)=0.$ В этой точке $v(x_0)=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\gamma}}.$ Тогда

$$\int\limits_v^{v(x_0)}\frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2-\frac{\gamma}{2}v^4}}=|x-x_0|.$$ Интегрируя, имеем

$$\int\limits_v^{v(x_0)}\frac{dv}{\sqrt{\alpha}v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{\gamma}{2\alpha}}}=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_v^{v(x_0)}\frac{d(\frac{1}{v})}{\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{\gamma}{2\alpha}}}=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\frac{1}{v}}^{\sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}}\frac{dz}{\sqrt{z^2-\frac{\gamma}{2\alpha}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(-arch1+arch\frac{1}{v\sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}})=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}arch\frac{1}{v\sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}}.$$

Следовательно, $v=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\gamma}}\dfrac{1}{ch(\sqrt{\alpha}(x-x_0))}$. Таким образом,

$$u(x,t)=e^{i\alpha t}\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\frac{1}{ch(\sqrt{\alpha}(x-x_0))},$$ где $x_0\in\mathbb{R}.$

2. После замены $u(x,t)=(2-x)t+v(x,t)$ получаем задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v+(2-x)t, & 0<x<2, t>0,\\ v(0,t)=0, & v(2,t)=0,\\ v(x,0)=0, & \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=x-2.\end{cases}$$

Ищем частное решение однородного уравнения для v в виде $v = X(x)T(t).$ Разделяя переменные $\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} + 1 = -\lambda^2,$

получаем задачу на собственные значения $\begin{cases} X''(x) + (\lambda^2+1)X(x) = 0, \quad 0 < x < 2, \\ X(0) = X(2) = 0. \end{cases}$

Решение этой задачи имеет вид

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{2},\ k = 1, 2, ...,\ \lambda_k = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 - 1},\ k = 1, 2, ...$$

Разложим в ряд Фурье $x - 2 = -\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{4}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi x}{2},\ (2-x)t = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{4t}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi x}{2}.$

Будем искать $v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\sin\dfrac{\pi k x}{2}.$

Тогда для $a_k(t)$ получаем задачу Коши $\begin{cases} a_k''(t) + \lambda_k^2 a_k(t) = \dfrac{4t}{k\pi}, \\ a_k(0) = 0, \qquad a_0'(0) = -\dfrac{4}{k\pi}, \end{cases}$

решение которой имеет вид $a_k(t) = \dfrac{4t}{k\pi\lambda_k^2} - \dfrac{k\pi}{\lambda_k^3}\sin\lambda_k t.$

Итак $u(x,t) = (2-x)t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{4t}{k\pi\lambda_k^2} - \dfrac{k\pi}{\lambda_k^3}\sin\lambda_k t\right)\sin\dfrac{\pi k x}{2}.$

3. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами достаточно установить ограниченность частичных сумм. Пусть $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ t_k = a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k}.$

При $n < 2^k$ имеем

$$s_n \le a_1 + (a_2 + a_3) + ... + (a_{2^k} + ... + a_{2^{k+1}-1}) \le a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k} = t_k,$$

так что $s_n \le t_k.$ (1)

С другой стороны, при $n > 2^k$

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k ,$$

так что $2s_n \geq t_k$. (2)

В силу (1) и (2) последовательности $\{s_n\}$ и $\{t_k\}$ или обе ограничены, или обе не ограничены. Утверждение доказано.

4. Положим $H(x)=1$ (т.е. пусть $x \geq 0$). Тогда $f\left(a+bH(x)\right) = f(a+b)$. Если $H(x)=0$ (т.е. $x<0$), то $f\left(a+bH(x)\right) = f(a)$. Следовательно, справедливы равенства $f\left(a+b\right) = A+B$, $f(a) = \mathrm{A}$. Отсюда $A = f(a), B = f(a+b) - f(a)$.

5. Положим $x = \frac{1}{n} + \alpha,\ x_1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда $1 - \sin(\mathrm{x}) - \mathrm{nx} = 1 - \sin\left(\frac{1}{n} + \alpha - 1 - n\alpha\right) \cong 0$.

Справедливы равенства

$$\sin\left(\frac{1}{n}+\alpha\right) = \sin\frac{1}{n} + \alpha\cos\frac{1}{n} + O\left(\alpha^2\right),\ \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),\ \cos\frac{1}{n} = 1 - O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом $\frac{1}{n} + \alpha = -n\alpha + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, или $\alpha = -\frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Окончательно,

$$x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$