Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2014 г.

Направление "Прикладная математика и информатика",

Профиль "Анализ и принятие решений" **КОД — 110**

Решения и критерии.

Каждая задача оценивается в 20 баллов. В зачет идут 5 лучших решений.

1. На множестве $\{a, b, c, d, e, f\}$ определено бинарное отношение P. Можно ли представить P в виде пересечения нескольких строгих линейных порядков, если

а) $P = \{(a,b),(c,d)\}$; б) $P = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$; в) $P = \{(a,b),(a,e),(b,e),(c,e),(c,f)\}$.

Решение а) Да. Например, $P_1 : a > b > e > f > c > d$, $P_2 : c > d > f > e > a > b$.

б) Нет. Линейные порядки транзитивны, а пересечение транзитивных отношений транзитивно. Поэтому P тоже должно быть транзитивным. А это неверно — $(a,b) \in P$, $(b,c) \in P$, но $(a,c) \notin P$.

в) Да. Например, $P_1 : a > b > c > e > f > d$, $P_2 : d > c > f > a > b > e$.

Критерии. Разумные соображения про линейные порядки — до 3 баллов. Сделаны только пункты а), в) — 12 баллов.

2. Граф "волейбольная сетка" состоит из m рядов по n вершин в каждом. Соединены только соседние вершины в ряду или столбце. При каких m и n этот граф будет а) двудольным; б) содержать гамильтонов цикл?

Решение. а) При всех m и n. Вершины можно покрасить в 2 цвета в шахматном порядке.

б) Заметим, что если в двудольном графе существует гамильтонов цикл, то в каждой доле должно быть одинаковое число вершин. Поэтому, если число вершин в графе нечетно (т.е. m и n нечетны), то гамильтонова цикла не существует. Также гамильтонова цикла не существует, если m или n равно 1, т.к. в таком графе вообще нет циклов. В остальных случаях гамильтонов цикл существует и легко построить соответствующие примеры.

Критерии. Каждый пункт оценивался в 10 баллов. Построен гамильтонов цикл в тех случаях, когда он существует — 5 баллов. Решение на примерах — до 2 баллов.

3. Сколько существует номеров Российских паспортов, начинающихся на 45 08, в которых встречается 53? (считаем, что возможны все номера паспортов, хотя на самом деле это не верно).

Решение. 53 может стоять в любой из 5 позиций ($53{*}{*}{*}{*}$, ${*}53{*}{*}{*}$, ${*}{*}53{*}{*}$, ${*}{*}{*}53{*}$, $****53$). На месте любой из звездочек может стоять любая цифра, поэтому каждая из возможностей это 10^4 номеров. Но возможности пересекаются, поэтому необходимо применить формулу включений и исключений.

Существует 6 непустых попарных пересечений ($5353**$, $53*53*$, $53**53$, $*5353*$, $*53*53$, $**5353$, каждое из которых содержит 100 элементов, и одно тройное 535353 из одного элемента.

Ответ: $5 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^2 + 1 = 49401$.

Критерии. Ответ $5 \cdot 10^4$ с объяснениями — 7 баллов, 10^4 — 2 балла, ошибки при использовании формулы включений и исключений — 12-15 баллов.

4. Вычислите 2014-ую производную функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $x = 0$.

Решение. В окрестности 0 функция $f(x) = 1-x^2+x^4-x^6\ldots-x^{2014}+\ldots$ (пользуемся формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии). 2014-я производная в 0, равна $-2014!$

Критерии. Доказано, что 2013-я производная равна 0, — 3-4 балла. Найдена закономерность и угадан ответ — 7 баллов. Неудачные попытки разложить в ряд Тейлора — до 5 баллов.

5. При каких α и β выполнено равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin\alpha x}-\cos x}{x^\beta}=3$?

Решение. Случай 1. $\alpha = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin\alpha x}-\cos x}{x^\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^\beta}.$$

Разложим $\cos x$ в ряд Тейлора

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{x^2}{2}-...}{x^\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-...}{x^\beta}.$$

Если $\beta = 2$, предел равен $\frac{1}{2}$, в противном случае предел равен 0 или ∞. Решений нет.

Случай 2. $\alpha \neq 0$. Разложим в ряд Тейлора:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\alpha x+...-1+\frac{x^2}{2}-...}{x^\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x+...+\frac{x^2}{2}-...}{x^\beta}.$$

Если $\beta = 1$, то предел равен α, т.е. при $\alpha = 3$ получаем искомое значение предела.

Если $\beta \neq 1$, то предел равен либо 0, либо ∞.

Ответ: $\alpha = 3, \beta = 1$.

Критерии. Не учтен случай $\alpha = 0$ — 17 баллов; допущены не грубые ошибки при преобразованиях (при правильной идее решения) — 10 баллов; ответ без удовлетворительного обоснования — 2 балла.

6. Известно, что случайная величина ξ принимает только натуральные значения и $P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$. Найдите а) неизвестную константу c; б) математическое ожидание случайной величины ξ.

Решение. а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{k}-\frac{c}{k+1}\right) = c = 1$.

б) $E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{k(k+1)}\cdot k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{k+1} = \infty$ (ряд расходится).

Критерии. Решен только пункт а) — 8 баллов, записан правильный ответ на первый пункт без обоснования — 2 балла.

7. Автомат расфасовывает большую партию чая по пакетам. Предполагается, что вес пакета адекватно описывается гауссовским распределением. Случайным образом выбрали 6 пакетов чая. Вес этих пакетов составил 99, 102, 103, 96, 98, 95 граммов.

а) Можно ли на уровне значимости $0,05$ принять гипотезу о том, что в среднем вес пакета составляет 100 гр.?

б) Постройте доверительный интервал уровня надежности 0.9 для дисперсии веса пакета чая, считая, что истинное среднее веса пакета совпадает с номинальным весом 100 грамм.

Решение. В решении используются параметрические критерии, т.к. принято предположение о том, что вес пакета чая имеет гауссовское распределение.

а) Для проверки гипотезы применим одновыборочный критерий Стьюдента (т.к. истинная дисперсия нам неизвестна, будем пользоваться оценкой дисперсии). Нулевая гипотеза: $\mu = 100$. Альтернативная гипотеза $\mu \neq 100$.

Несмещенная оценка дисперсии $\hat{D} = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 = 0.2 * ((99 - 98.83)^2 + ... + (95 - 98.8)^2) = 10.17$.

Рассчитаем статистику для выбранного критерия

$$t = \frac{|\overline{X} - \mu|}{\frac{\sqrt{\hat{D}}}{n}} = \frac{|98.83 - 100| * 6}{3.19} = 2.19$$

.

Если верна нулевая гипотеза, то статистика будет имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Критическая область будет двусторонней (см. формулировку альтернативной гипотезы). Найдем квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы $t_{0.975,5} = 2.57$. В силу симметрии $t_{0.025,5} = -2.57$.

Рассчитанная статистика t попадает в доверительную область, т.к. $-2.57 < 2.19 < 2.57$.

Ответ: на уровне значимости 0.05 можно принять гипотезу о том, что средний вес пакета составляет 100 грамм.

б) Доверительный интервал для дисперсии случайной величины при известном истинном математическом ожидании имеет вид:

$$P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}} \leqslant D \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}}\right) = 1 - \alpha,$$

где $\mu = 100$, $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$ по условию задачи.

Найдем необходимые квантили распределения χ^2 по таблице:

$$\chi^2_{0.95,6} = 12.59, \chi^2_{0.05,6} = 1.63$$

.

Подставим числовые значения в выражение для доверительного интервала: $P(\frac{59}{12.59} \leq D \leq \frac{59}{1.63}) = 0.9$.

Ответ: $P(4.69 \leq D \leq 36.08) = 0.9$.

Критерии. Каждый пункт — 10 баллов. снижение от 4 до 8 баллов за неправильный расчет выборочной дисперсии, использование квантилей гауссовского распределения (вместо необходимых квантилей распределения Стьюдента).

8. Пусть M и N — два 4-мерных подпространства в $\mathbb{R}^6$. Докажите, что $S = M \cap N$ можно представить, как множество решений некоторой системы из n линейных уравнений (от 6 неизвестных). Каким может быть число n?

Решение. 4-х мерное подпространство 6-ти мерного пространства можно задать в виде системы из двух линейно-независимых уравнений от шести переменных. Объединяя в систему уравнения задающие два подпространства (так как у нас пересечение), получаем систему из 4-х уравнений. К этой системе можно добавлять сколько угодно линейно зависимых уравнений, поэтому в качестве n можно взять любое число, большее 4-х. Теперь посмотрим, сколько линейно-независимых уравнений может быть в нашей системе. Случаи 3 и 2 возможны (легко привести примеры), а вот одно линейно-независимое уравнение невозможно, так как размерность пересечения подпространств не может быть выше размерности самих подпространств. Ответ n — натуральное число, большее 2.

Критерии: Не учтена возможная линейная зависимость системы — 15 баллов, нет обоснования — 10 баллов.

9. Найдите все такие значения параметров x и y, что матрица A^{2014} нулевая, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & x \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица нильпотентна (имеет нулевую степень), тогда и только тогда, когда ее собственные значения равны 0, т.е. ее определитель (произведение собственных значений) и след (сумма элементов на диагонали матрицы, он же сумма ее собственных значений) равны 0. Отсюда получаем $x = -1$, $y = 0$.

Критерии: Доказана только достаточность — 10 баллов.

10. Найдите решение задачи Коши $y'' + py' + qy = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$, действительные числа p и q и функцию $f(x)$, если известно, что уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет частные решения $e^{-x} + \sin x$ и $xe^{-x} + \sin x$.

Решение. Подставлем частные решения в дифференциальное уравнение, исключаем $f(x)$ и, требуя тождественного равенства по x находим необходимые параметры. А именно, получаем тождество:

$$e^{-x}((p-q-1)x - 2*p + q + 3) = 0,$$

откуда $p = 2$, $q = 1$, $f(x) = 2\cos(x)$, $y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \sin(x)$.

Критерии. Ошибки при работе с формулами — 10-15 баллов, не найдено всё из требуемого — 10-15 баллов.