

9 класс.

1. Берётся натуральное десятичное число  $N$  ( $0 < N < 256$ ), например 201, и в ячейку памяти вычислительной машины записывается его двоичное представление: 11001001 (размер ячейки – один байт). Над содержимым ячейки выполняется преобразование: циклический сдвиг влево на одну позицию. Все цифры двоичного числа сдвигаются влево на одну позицию, при этом старший бит переходит в младший: 10010011. Этой двоичной записи соответствует десятичное число 147. Преобразование повторяется восемь раз. Входной файл содержит  $M$  ( $0 < M < 20$ ) чисел  $N_i$  ( $0 < N_i < 256$ ). Для каждого из чисел  $N_i$  необходимо вычислить наибольшее из десятичных чисел, полученных в процессе преобразований и вывести его в выходной файл.

Пример

Входные данные	Выходные данные
2	228
201	194
11	

Решение.

Сформировать текстовый файл в текстовом редакторе Блокнот. Получить числа можно разными способами.

1 Способ

Вручную перевести число в двоичную систему счисления, а затем выполнить циклические сдвиги, определить наибольшее из полученных чисел и перевести его в десятичную форму

Например:

$201_{10}$

11001001

10010011

00100111

01001110

10011100

00111001

01110010

11100100 максимум  $228_{10}$

2 Способ

Используем то, что старшую цифру двоичного представления мы можем получить как результат деления на 128. Полученную цифру нужно добавить к результату сдвига, а сдвиг влево двоичной записи – это умножение на 2, причем, чтобы исключить переполнение, необходимо еще взять остаток от деления полученного произведения на 256.

201

$$201 \text{ div } 128 + (201 * 2) \text{ mod } 256 = 147$$

$$147 \text{ div } 128 + (147 * 2) \text{ mod } 256 = 39$$

$$39 \text{ div } 128 + (39 * 2) \text{ mod } 256 = 78$$

$$78 \text{ div } 128 + (78 * 2) \text{ mod } 256 = 156$$

$$156 \text{ div } 128 + (156 * 2) \text{ mod } 256 = 57$$

$$57 \text{ div } 128 + (57 * 2) \text{ mod } 256 = 114$$

$$114 \text{ div } 128 + (114 * 2) \text{ mod } 256 = 228$$

3 Способ

Метод, описанный в предыдущем пункте, можно использовать в электронных таблицах

	A
1	201
2	=ОСТАТ(A1*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A1/128;0)
3	=ОСТАТ(A2*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A2/128;0)
4	=ОСТАТ(A3*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A3/128;0)
5	=ОСТАТ(A4*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A4/128;0)
6	=ОСТАТ(A5*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A5/128;0)
7	=ОСТАТ(A6*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A6/128;0)
8	=ОСТАТ(A7*2;256)+ОКРУГЛВНИЗ(A7/128;0)
9	<b>МАКС</b>
10	<b>=МАКС(A1:B1)</b>

Например:

	201
	147
	39
	78
	156
	57
	114
	228
<b>МАКС</b>	
	<b>201</b>

#### 4 Способ

Написать программу на любом языке программирования.

Например, на языке Паскаль:

```

var n,k,i,max:integer;
begin
readln(n);
max:=n;
for i:=1 to 7 do
begin
n:=(n mod 128)*2 + n div 128 ;
if n>max then max:=n;
end;
writeln(max)
end.

```

2. Система счисления Майя является комбинацией пятеричной и двадцатеричной систем счисления. Первые четыре цифры обозначаются соответствующим количеством точек. Далее каждая очередная пятерка обозначается горизонтальной чертой. В системе счисления Майя нашлось место и для цифры ноль – она обозначается символом, похожим на глаз. На рисунке 1 приведены цифры Майя.

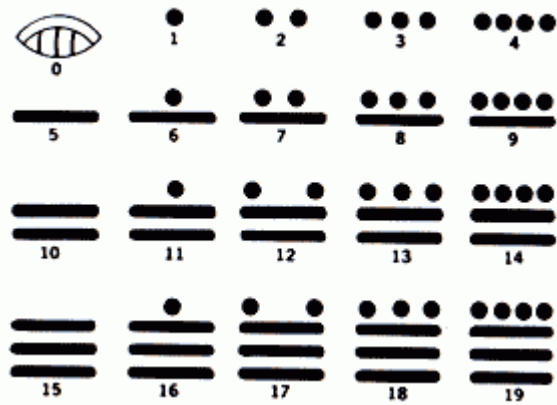


Рис.1 – Цифры Майя



Так у Майя изображалась число 20. При представлении числа цифры писались не слева направо, как привычно для нас, а сверху вниз (т.е. цифра старшего разряда находилась на «вершине»). Логично предположить, что «вес» разряда получается из «веса» предыдущего разряда домножением на 20, но в этой цепочке есть исключение: вместо  $20 \times 20 = 400$  для следующего разряда берется  $20 \times 18 = 360$ , поэтому и «веса» следующих разрядов не являются степенью 20: 1; 20; 360; 7 200; 144 000; 2 880 000 и т.д. (Существуют разные гипотезы о причинах такого нарушения).

Приведем еще несколько примеров (рис. 2):

$$19 \times 360 + 13 \times 20 + 13 = 7113_{10}$$

$$10 \times 360 + 0 \times 20 + 7 = 3607_{10}$$

$$2 \times 7200 + 0 \times 360 + 6 \times 20 + 5 = 14525_{10}$$

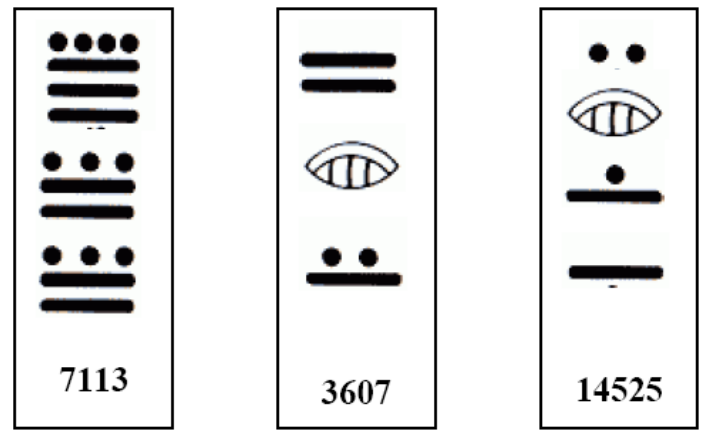


Рис. 2 Примеры

Научитесь переводить целые числа из диапазона от 0 до 10 000 000 в систему Майя. Входной файл содержит число M – количество чисел для перевода в систему Майя, следующие M строк содержат сами эти числа. Необходимо вывести изображение каждого числа. При выводе для отображения точек использовать звездочки, для изображения горизонтальных линий – тире, для нуля – обычную цифру ноль. Между цифрами добавлять пустые строчки. Числа в выходном файле должны разделяться словом NEXT.

Пример

Входные данные	Выходные данные
3	****
7113	-
3607	-

14525	-
	***
	-
	***
	-
	-
	NEXT
	-
	-
	0
	**
	-
	NEXT
	**
	0
	*
	-
	-

Решение.

Сформировать текстовый файл в текстовом редакторе Блокнот. Получить запись можно разными способами.

1 способ.

Выполнить перевод вручную на черновике

7113	<u>20</u>	
<u>60</u>	355	<u>18</u>
111	<u>18</u>	19
<u>100</u>	175	
113	<u>162</u>	
<u>100</u>	13	
13		

3607	<u>20</u>
<u>20</u>	18
160	
<u>160</u>	
7	

14525	<u>20</u>		
<u>140</u>	726	<u>18</u>	
52	<u>72</u>	40	<u>20</u>
40	6	<u>40</u>	2
125		0	
<u>120</u>			

## 2 Способ

Написать программу-калькулятор для перевода чисел. Ниже приведен пример программы на языке Паскаль.

```
var n,y,k,p,c,i:longint;

begin
readln (n);

y := 1;
k := 1;
while n>=y do
begin
  if k = 2 then p := 18 else p := 20;
  y := y * p;
  k := k+1
end;
y := y div p;
k := k - 1;

while y>0 do
begin
  k := k - 1;
  if k = 2 then p := 18 else p := 20;
  c := n div y;
  n := n mod y;
  y := y div p;

  if c =0 then
    writeln(0)
  else
    begin
      if c mod 5 <> 0 then
        begin
          for i := 1 to c mod 5 do
            write('*');
          writeln
        end;
      for i := 1 to c div 5 do
        writeln('-');
      end;
      writeln
    end;
end;
writeln ('NEXT')
end.
```

## 3 Способ

Для вычисления цифр использовать электронные таблицы.

	А	В	С
<b>1</b>	<b>число=</b>		<b>Цифры, начиная с младшего разряда</b>
<b>2</b>	20	=ОКРУГЛВНИЗ(В1/А2;0)	=ОСТАТ(В1;А2)
<b>3</b>	18	=ОКРУГЛВНИЗ(В2/А3;0)	=ОСТАТ(В2;А3)
<b>4</b>	20	=ОКРУГЛВНИЗ(В3/А4;0)	=ОСТАТ(В3;А4)
<b>5</b>	20	=ОКРУГЛВНИЗ(В4/А5;0)	=ОСТАТ(В4;А5)
<b>6</b>	20	=ОКРУГЛВНИЗ(В5/А6;0)	=ОСТАТ(В5;А6)

Пример применения таблицы для перевода:

число=	7113	Цифры, начиная с младшего разряда
20	355	13
18	19	13
20	0	19
20	0	0
20	0	0

3. Научитесь определять количество чисел в диапазоне от 0 до N, которые имеют в записи числа в системе счисления M ровно K значащих нулей.

Ограничения:  $0 < N \leq 100000$ ,  $0 < M < 100$ ,  $0 < K < 100$ .

В первой строке входных данных записано одно число P – количество троек чисел, для которых нужно решить задачу. В следующих P строках записаны числа N, M, K.

Для каждой тройки выведите ответ на отдельной строке.

Входные данные	Выходные данные
2	28
250 2 5	17
190 3 3	

*Комментарий: запись числа 0005 содержит 3 нуля, но в данном случае они не являются значащими, так как не влияют на величину самого числа - их можно просто отбросить – получится 5. Другой пример: 120300 – в данном числе 3 значащих нуля – их нельзя отбросить.*

Решение.

Сформировать текстовый файл в текстовом редакторе Блокнот. Получить ответ можно разными способами.

1 Способ

Самый простой способ – это перебрать все числа от 0 до N. Каждое число разложить на цифры в системе счисления M и посчитать количество нулей в разложении, если оно совпадет с заданным K, то увеличить результат на 1. Ниже приведен фрагмент алгоритма на языке Паскаль.

```

program p1;
var i,n,x,count:longint;
    c,m,k:byte;
begin
readln(n,m,k);
count := 0 ;
for i := 0 to n do

```

```

begin
  x := i ;
  c := 0 ;
  repeat
    if x mod m = 0 then
      c := c+1 ;
      x := x div m
    until x=0;
    if c = k then
      count := count + 1
  end;
  writeln(count)
end.

```

*Комментарий: операция div обозначает целочисленное деление; операция mod обозначает остаток от целочисленного деления; все переменные, использованные в алгоритме являются целочисленными.*

## 2 Способ

Перевести число  $N$  в систему счисления с основанием  $M$ , а затем с использованием методов комбинаторики посчитать число перестановок  $K$  нулей и цифр от 0 до  $M-1$  в пределах интервала от 0 до  $N$ .

Например,  $250_{10}=11111010_2$

$K=5$ .

Наименьшие числа, имеющие 5 значащих нулей, должны быть 6-значными, причем на 1 месте должна быть цифра, отличная от 0. Такое число одно (100000)

Для 7-значных: первая позиция – 1, осталось выбрать 5 позиций для 0 – это сочетания из 6 по 5:  $C_6^5 = 6$  способов.

Для 8-значных: 1 позиция – 1, аналогично выбираем 5 позиций для 0:  $C_7^5 = 21$  способ.

Обратите внимание, что наибольшее из подходящих по условию чисел  $11100000 < 11111010$ , поэтому все из 21 построенных чисел принадлежат рассматриваемому диапазону  $[0;N]$

Итого:  $1+6+21=28$

Другой пример:

$190_{10}=21001_3$

4-значные: на первом месте 2 возможности 1 или 2, остальные цифры – нули

5-значные: на первом месте значащая цифра, позиции нулей выбираем из 4 возможных, учитываем, что на значащих местах могут быть 2 возможные цифры:  $C_4^3 * \bar{A}_2^2 = 16$

Далее учитываем, что последнее число  $22000_3=216_{10}$  не входит в рассматриваемый диапазон:  $2+16-1=17$

4. Траектория движения точки по координатной плоскости описывается уравнением

$$y = \frac{x^2 + Ax + B}{\sqrt{1-x}}$$

Траектория зависит от двух параметров  $A$  и  $B$ . Напишите программу, которая по введенным значениям параметров  $A$  и  $B$  определяет, сколько раз точка пересечёт ось абсцисс. Если это количество бесконечно, то выведите отрицательное число  $-1$ .

Пример.

Вход	Выход
------	-------

**Решение.** Сначала решим математическую задачу: найдём число решений уравнения

$$\frac{x^2 + Ax + B}{\sqrt{1-x}} = 0$$

в зависимости от значений параметров  $A$  и  $B$ . Подкоренное выражение положительно, поэтому  $x < 1$ . Итак, нужно найти число решений квадратного уравнения  $x^2 + Ax + B = 0$ , удовлетворяющих условию  $x < 1$ . Решим эту задачу графическим способом.

1) Уравнение  $x^2 + Ax + B = 0$  имеет два различных корня, удовлетворяющих условию  $x < 1$ , если парабола – график функции  $y = x^2 + Ax + B$  – расположена следующим образом (см. рис. 3)

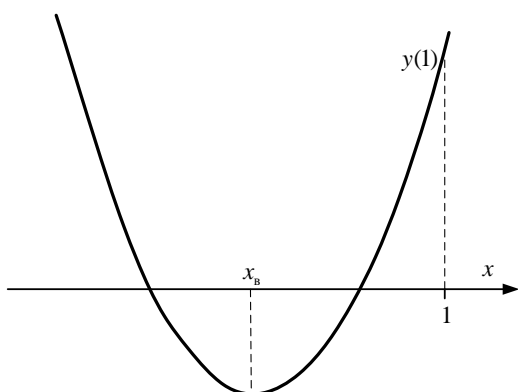


Рис. 3

Эта ситуация описывается следующим набором условий:

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_B < 1 \\ y(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 4B > 0 \\ -\frac{A}{2} < 1 \\ 1 + A + B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B < \frac{A^2}{4} \\ A > -2 \\ B > -A - 1 \end{cases}$$

2) Уравнение  $x^2 + Ax + B = 0$  имеет один корень, удовлетворяющий условию  $x < 1$ , если парабола – график функции  $y = x^2 + Ax + B$  – расположена одним из двух способов (см. рис. 4, 5)

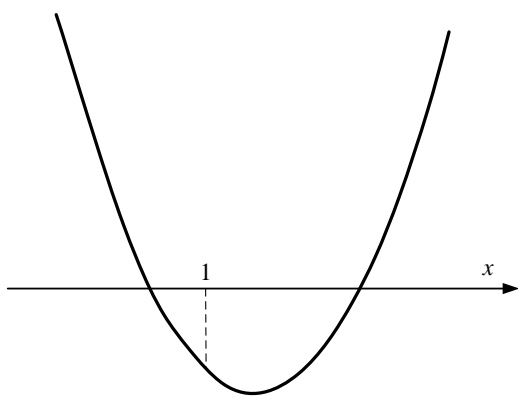


Рис. 4

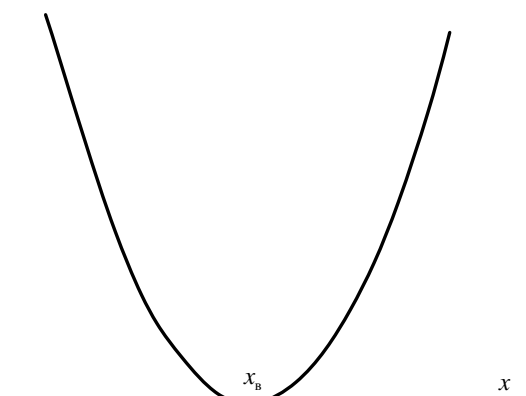


Рис. 5

Первый вариант (рис. 4) отвечает условию  $y(1) < 0 \Leftrightarrow 1 + A + B < 0 \Leftrightarrow B < -A - 1$ .



Второй вариант (рис. 5) описывается условиями:

$$\begin{cases} D = 0 \\ x_b < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 4B = 0 \\ -\frac{A}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{A^2}{4} \\ A > -2 \end{cases}$$

3) Во всех остальных случаях уравнение  $x^2 + Ax + B = 0$  не имеет решений, удовлетворяющих условию  $x < 1$ , поэтому точка ни разу (ноль) не пересечёт ось абсцисс.

5. Дан список  $L$  из всех натуральных чисел от 1 до заданного  $N$ , записанных по возрастанию. Например, при  $N = 9$  список  $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

На основе списка  $L$  строится новый список  $L1$  следующим способом: берется  $K$  последних элементов списка и переносится в его начало.

Например, для  $N = 9$  и  $K = 3$  список  $L1 = \{7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Требуется найти сумму элементов списка  $L1$ , находящихся в списке с позиции  $I$  до позиции  $J$  включительно.

В нашем примере при  $I = 2$  и  $J = 7$   $8 + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 = 27$ .

Напишите программу, которая находит сумму подсписка при заданных  $N$ ,  $K$ ,  $I$  и  $J$  ( $1 \leq N \leq 20000$ ). Например:

Ввод	Вывод
9 3 2 7	27

Решение.

Обратите внимание, что должны быть рассмотрены три случая:

- 1) в сумму входят только элементы из участка цепочки, перенесенной в начало списка;
- 2) в сумме только элементы из части цепочки от 1 до  $N-k$ ;

В обоих случаях цепочка – это арифметическая прогрессия из последовательных натуральных чисел, применим формулу суммы арифметической прогрессии:

$$S = (A_i + A_j) * (j - i + 1) / 2$$

- 3) В последнем случае в цепочку входят числа из двух участков, поэтому они не образуют арифметическую прогрессию, но цепочку можно разбить на две подпоследовательности, каждая из которых будет арифметической прогрессией: от  $A_i$  до  $A_k$  и от  $A_{k+1}$  до  $A_j$ . Тогда сумма цепочки есть сумма этих двух прогрессий.

Ниже приведена программа на языке Паскаль.

```
var i,j,k,n,s:integer;
begin
readln(n,k,i,j);
if i>k then
  s := (i+j-2*k)*(j-i+1) div 2
else
  if j<=k then
    s := (i+j+2*n-2*k)*(j-i+1) div 2
  else
    s := (i+2*n-k)*(k-i+1) div 2 + (j-k+1)*(j-k) div 2 ;
writeln (s);
end.
```