

## ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения задания – 240 мин.

### Предварительные критерии оценивания работ участников олимпиадных состязаний

Задание включает 5 задач. Оценивание работ участников олимпиады осуществляется по столбальной шкале:

Задача № 1 – 20 баллов;

Задача № 2 – 20 баллов;

Задача № 3 – 10 баллов;

Задача № 4 – 20 баллов;

Задача № 5 – 30 баллов.

#### Задача № 1.

(дифференциальные уравнения)

Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -0.5x(t) + y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -0.75x(t) - 2.5y(t) + 1 \end{cases}$$

при  $x(t_0) = 1$ ,  $y(t_0) = -0.5$ , на интервале  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 5$ .

Определить устойчиво ли решение и, если решение устойчиво, определить значения переменных  $x$  и  $y$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Рекомендация: см. решения задач олимпиады 2014 года.

#### Задача № 2.

(теория управления)

Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t).$$

Найти математическую модель импульсной переходной функции объекта.

Решение:

Исходному дифференциальному уравнению соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Согласно определению, импульсная переходная функция есть реакция динамической системы на воздействие в виде дельта функции, изображение которой по Лапласу равно единице. Исходя из сказанного, запишем:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \cdot 1 = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Используя таблицу с изображениями Лапласа, переведем полученное решение из пространства изображений в пространство оригиналов:

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0.$$

#### Задача № 3.

(линейная алгебра)

Линейный оператор  $\varphi$  в трехмерном пространстве  $\mathfrak{R}^3$  задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ в стандартном базисе } \vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ пространства } \mathfrak{R}^3.$$

Число  $\lambda_1 = -3$  является собственным числом этого оператора.

Найти остальные собственные числа  $\lambda_2, \lambda_3$ . Для каждого из собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  найти по одному собственному вектору  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ , соответственно. Доказать, что  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  образуют базис в  $\mathfrak{R}^3$ , и найти матрицу данного оператора в базисе  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ .

Ответ:

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 9, \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**Задача № 4.**

(шифрование и криптография)

Одна секретная организация, располагающая своими агентами по всему миру, планирует перейти на новый способ передачи секретных сообщений. Для связи между агентами и завербованными ими информаторами разработана специальная система числовой кодировки всех возможных сообщений, которые могут потребоваться. Для передачи какого-либо сообщения информатору достаточно сообщить агенту его номер, так что сам текст сообщения даже не будет передаваться. Сообщения кодируются числами подряд – с 1 и далее, но каждый агент может сообщить своим информаторам, что к номерам сообщений следует прибавлять какое-то конкретное число, одинаковое для всего перечня секретных сообщения (корректирующее число). Для передачи номера сообщения информатор должен оставить в условленном месте или передать определенному человеку сумму в местных банкнотах, равную номеру сообщения.

Организация планирует направить своих агентов в две страны. В первой имеют хождение банкноты достоинством 5, 7 и 12 единиц в местной валюте, в другой – только 7 и 10 единиц. Для расчетов между собой жители этих стран также пользуются монетами, но агенты могут использовать для связи лишь банкноты.

1. Возможно, ли наладить указанную систему передачи секретных сообщений в обеих странах?
2. Начиная, с какого номера сообщения, информатор сможет передать агенту номер любого сообщения (другими словами, какое число следует прибавить к номерам всех сообщений) в условиях денежной системы первой страны?
3. Каким будет такое же число для второй страны?
4. Возможно, ли наладить указанную систему передачи сообщений в каждой из стран, если в них произойдут денежные реформы, в результате которых из оборота будет изъята часть существующих номиналов банкнот?
5. Изменится ли в таком случае корректирующее число для каждой из данных стран?

Решение:

## Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2015 г.

Для того, чтобы наладить указанную систему передачи, нужно, чтобы любые числа, начиная с некоторого, были представимы в виде линейной комбинации заданных номиналов. Это число без 1 и будет корректирующим числом. Проверить, возможно ли такое, нетрудно, если есть очевидный способ набрать указанными номиналами 10. Тогда требуется лишь проверить, что можно получить сочетанием различных номиналов числа, оканчивающиеся на 1, 2, ..., 9. Максимальное из таких чисел без 1 будет искомым.

1. Проверим это для заданных условий. Для первой страны 10 получается как  $5+5$ . Условием того, что можно получить числа, оканчивающиеся на все цифры, является взаимная простота некоторого номинала с 10. В данном случае таким номиналом является 7 – значит, среди чисел, кратных 7, можно обнаружить числа, оканчивающиеся на все возможные цифры. Для второй страны имеются номиналы 7 и 10. Выше указано, что их достаточно для реализации описанной системы.
2. Для получения чисел, оканчивающихся на все возможные цифры, можно воспользоваться дополнительными номиналами для снижения максимального числа. 1:  $21 = 7*3$ , 2:  $42 = 7*6$ , 3:  $63 = 7*9$ , 4:  $14 = 7*2$ , 5:  $35 = 7*5$ , 6:  $56 = 7*8$ , 7:  $7$ , 8:  $28 = 7*4$ , 9:  $49 = 7*7$ . Максимум равен 63. Попробуем получить числа, оканчивающиеся на 3, меньше 63. Поскольку  $12 = 7+5$ , а  $7 = 5+2$ , получить можно только некоторые из чисел, представимых в виде  $5*a+2*b$ , где  $a$  и  $b$  – натуральные числа. При этом  $a$  должно быть не меньше  $b$ . Для числа 3 такое представление невозможно.  $13 = 5+2*4$ , т.е. не представимо.  $23 = 3*5+2*4$ , т.е. также не представимо.  $33 = 5*5+2*4$ , следовательно, оно может быть представлено в виде  $7*4+5$ . Или  $7*3+12$ . Тогда максимумом становится число 56. Условия перебора те же. 6 – не представимо,  $16 = 5*2+2*3$ ,  $26 = 5*4+2*3 \Rightarrow 26=3*7+5 = 2*7+12$ . Имеем числа: {21, 42, 33, 14, 35, 26, 7, 28, 49}. Продолжая оптимизацию, имеем:  $9 = 5+2*2$ ,  $19 = 3*5+2*2 \Rightarrow 19 = 12+7$ ; {21, 42, 33, 14, 35, 26, 7, 28, 19};  $2 = 5*0+2$ ;  $12 = 12$ ; {21, 12, 33, 14, 35, 26, 7, 28, 19}; 5: 5; {21, 12, 33, 14, 5, 26, 7, 28, 19}; Дальнейшая оптимизация невозможна, поскольку число, оканчивающееся на 3, меньшее 33 получено быть не может – проверено перебором выше. Ответ: число 32.
3. Поскольку дополнительных номиналов для данной страны не имеется, таким числом будет 62.
4. Для первой страны можно отказаться от номинала 12. Для второй – набор номиналов минимален.
5. Для первой страны при отмене номинала 12 корректирующее число не изменится.

### Список рекомендуемой литературы

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2005 г.
2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля, T1, T2. М.: Мир, 1988

**Задача № 5.**

(операционные системы, системное программирование)

Чему будут равны значения операндов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $n$ ,  $k$ ,  $m$  после выполнения нижеприведенного фрагмента программы на языке программирования C в UNIX – подобной операционной системе и почему ?

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>
int main()
{ int a=0, b=1, c=2, d=3, n=4, k=5, m=6, p[2];
  char buf[80];
  pipe(p);
  if( fork()==0)
  {m= creat("a.txt", 0664);
  a=write(4, "Привет участникам олимпиады\n", 17);
  close( p[0]);
  b=dup(3);
  exit(0);
  }
  else
  {wait(&c);
  d=read(3, buf, 7);
  n=read(p[0], buf, 9);
  k=dup2(a, b);
  }
  return 0;
}
```

**Список рекомендуемой литературы**

1. Стивене Р.У., Раго С.А. UNIX. Профессиональное программирование. 2-е издание. – СПб.: Символ-Плюс, 2007 г.