

Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2015 г.
Демонстрационный вариант и методические рекомендации
по направлению «Прикладная математика и информатика»
Профиль «Прикладная математика и информатика»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения задания — 240 мин. Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая из задач оценивается из 12 баллов, если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам.

1. Найти, при каких целых значениях x справедливо неравенство $F''(x) \geq 1 + x$, если $F(x) = x^{-1} + \ln \operatorname{sh} x$.
2. Найти, при каком значении параметра a обращается в нуль интеграл

$$\int_1^{10} \frac{1 + a \ln x + \sqrt{x}}{x^2} dx.$$

3. На плоскости задана декартова система с координатами x, y . При каких значениях вещественного параметра a кривая $x^2 = y + 16$ имеет наибольшее число точек пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = a^2$?
4. Найти, при каких комплексных значениях x сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{3} \frac{x^{2n}}{c_n(1+x^{4n})},$$

где $\binom{n}{3}$ есть число сочетаний из n элементов по 3, а последовательность c_n задается рекуррентным соотношением $c_{n+1} = c_n + 2n^2 + 3$, $c_0 = 0$.

5. Пусть V и W — двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$. Какие значения может принимать размерность подпространства $W \cap V$?
6. В урне находится m шаров, из которых m_1 белых и m_2 черных ($m_1 + m_2 = m$). Производится n извлечений одного шара с возвращением его (после определения его цвета) обратно в урну. Какова вероятность того, что ровно r раз из n будет извлечен белый шар?
7. Сколько раз в среднем нужно подбросить симметричную монету, чтобы решка выпала два раза подряд?
8. Двудольный неориентированный граф задан в виде бинарной прямоугольной матрицы $m \times n$. Предложить алгоритм, определяющий, является ли этот граф связным.
9. Пусть R — случайное бинарное отношение на множестве из n элементов. Для каждой пары (a, b) вероятность того, что aRb , равна 0,5, причем для разных пар эти вероятности независимы. Вычислить вероятность того, что отношение R является рефлексивным.

Следующие задания по условиям олимпиады формулируются только по-английски, но решения могут быть записаны как по-английски, так и по-русски:

10. Compute the following limit is a function of the real parameters a and b : $\lim_{x \rightarrow +0} (e^{x-1} + \sin(1+ax^2) - \ln \operatorname{ch} bx) = ?$.
11. Let the function $f_n(x)$ be given by the recurrence relation $f_n(x) = 2f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) + x$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 0$. Compute its derivative: $df_n(x)/dx = ?$
12. Find all real-valued ($\mathbb{R}$ -valued) solutions of the equation $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = e^x + 4x$.

Time to complete the task is 240 min. Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 12 points, if the sum exceeds 100, the result is equal to 100 points.

1. Find for which integer value of x does the inequality $F''(x) \geq 1 + x$ hold if $F(x) = x^{-1} + \ln \operatorname{sh} x$.
2. Find the value of the parameter a for which the following integral vanishes:

3. A Cartesian system with coordinates x, y is given in the plane. For which values of the real parameter a does the curve $x^2 = y + 16$ have the greatest number of intersections with the circle $x^2 + y^2 = a^2$?
4. Find for which complex values of x does the following series converge:

where $\binom{n}{3}$ is the number of combinations of 3 elements out of n , and the sequence c_n is given by the recurrence $c_{n+1} = c_n + 2n^2 + 3$, $c_0 = 0$.

5. Let V and W be two-dimensional subspaces in $\mathbb{R}^4$. Find the possible values of the dimension of the subspace $V \cap W$.
6. An urn contains m balls of which m_1 are white and m_2 black, $m_1 + m_2 = m$. A ball is drawn n times, its colour determined, and the ball is put back in the urn. What is the probability to draw a white ball exactly r times out of n ?
7. What is the expected number of tosses of a symmetric coin until tails come up twice in a row?
8. A bipartite undirected graph is specified by a binary $m \times n$ matrix. Devise an algorithm deciding whether the graph is connected.
9. Let R be a random binary relation on an n -element set such that for each pair (a, b) the probability that aRb is 0.5. What are the odds that R is reflexive?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Перечень и содержание тем олимпиадных состязаний

- (1) **Линейная алгебра**
 - (a) Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение.
 - (b) Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по строке и по столбцу.
 - (c) Транспонированная матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матриц.
 - (d) Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.
 - (e) Собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные и инвариантные подпространства.
 - (f) Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Индексы инерции квадратичных форм.
- (2) **Математический анализ**
 - (a) Множества. Операции над множествами. Числовые множества. Грани множеств. Множества в $\mathbb{R}^n$. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.
 - (b) Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы.
 - (c) Функции одной переменной. Производные. Исследование и построение графика функции.
 - (d) Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных.
 - (e) Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа и ее стационарные точки. Метод множителей Лагранжа.
 - (f) Неопределенный интеграл и его исчисление. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы и их исчисление.
 - (g) Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена.
- (3) **Дифференциальные уравнения**
 - (a) Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие решения. Поле направлений. Изоклины. Интегральные кривые. Задачи Коши.
 - (b) Уравнения в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати.
 - (c) Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации постоянной. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка.
 - (d) Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения по Ляпунову.
 - (e) Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.
 - (f) Системы линейных дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовый портрет. Понятие устойчивости решений динамической системы. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.
- (4) **Теория вероятностей и математическая статистика**
 - (a) Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и случайные величины. Функция плотности распределения. Совместное распределение нескольких случайных величин. Условные распределения.
 - (b) Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания и дисперсии. Условное математическое ожидание. Распределение дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, распределение Пуассона).
 - (c) Нормальное распределение и связанные с ним χ^2 -распределение, основные свойства.
 - (d) Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочные характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции).
 - (e) Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.
 - (f) Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень доверия и проверка значимости.

(5) **Дискретная математика**

- (а) Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, транзитивность, симметричность). Отношение эквивалентности. Отношение порядка.
- (б) Графы. Изоморфизм графов. Подграфы, цепи, циклы. Связность графов. Компоненты связности. Планарные графы. Критерии планарности. Деревья. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Свойства деревьев. Нахождение кратчайшего пути в графе. Эйлеровы и Гамильтоновы цепи и циклы.
- (с) Понятия алгоритма и сложности алгоритма. Простые структуры данных: массив, список, очередь, стек, дек. Последовательный и бинарный поиск. Алгоритмы сортировки одномерного массива и оценка сложности. Представление графов в виде матрицы смежности и матрицы инцидентности, алгоритмы на графах.

Список рекомендуемой литературы

- (1) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М. Наука. Физматлит, 1999 – 296 с. – Учеб. Для вузов 4-е изд.
- (2) Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов, 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 648 с.
- (3) Бесов О.В. Курс лекций по математическому анализу. Учебное пособие. Ч 1,2. М.: МФТИ. 216 с.
- (4) Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2. Учеб. пособие для вузов: в 2-х т. - М.: Высш. шк., 1970.
- (5) Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1-3. 8-е издание. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 680 с., 864 с., 728 с.
- (6) Демидович Б.П.(редактор). Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов Издание шестое, стереотипное. - М.: Наука, 1968. - 472 с. - илл.
- (7) Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1974. - 331с. Изд. 4-е.
- (8) Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям М.: Интеграл-Пресс, 1998 г. - 208 стр.
- (9) Купцов Л.П., Николаев В.С. Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МФТИ, 2003. 270 с.
- (10) Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 8-е изд., испр. и доп. Учебник. М.: «Едиториал УРСС», 2005. - 448 с.
- (11) Крамер Г. Математические методы статистики М.: Мир, 1975. - 648 с.
- (12) Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика 2-е изд., перераб. и доп.. - Москва : ГУ ВШЭ, 2005. - 252, [1] с.
- (13) Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А. Теория вероятностей. Учебное пособие. М., МЗ Пресс, 2007, 174 с.
- (14) А. Шень. Программирование: теоремы и задачи. Издательство МЦМНО, 2014.
- (15) В. Алексеев, В. Таланов. Графы и алгоритмы. М.: Издательство Бином. Лаборатория знаний, 2009.