Олимпиада для студентов и выпускников вузов – 2015 г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации по направлению «Математические методы анализа экономики»

Профили:
«Прикладная экономика»
«Экономика: исследовательская программа»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения - 180 мин.

Предварительные критерии оценивания работ участников олимпиадных состязаний
Решите все десять задач. Критерии приведены после решений. Оценивание работ участников олимпиады осуществляется по стобалльной шкале.

1. **Calculate the limit**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x-3tgx}{\cos x\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Решение. (Приводится только на русском языке)

Разлагая числитель и знаменатель на множители, получаем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tg^3x-3tgx}{\cos x\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{tgx\left(tg^2x-tg^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}tgx\left(tgx+tg\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}tgx\left(tgx+tg\frac{\pi}{3}\right)\frac{-1}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}}=-24.$$

Ответ: -24.

Критерии

а) Все правильно – 10 баллов.

б) Арифметическая ошибка – 1 балл.

в) Если есть движение в правильном направлении (разложение числителя и знаменателя на множители) – 3 балла.

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

2. Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & -16 & 3\end{pmatrix}$

(a) (3 p.) Compute eigenvalues and eigenvectors of matrix A
(b) (2 p.) Calculate matrix A^{-1}

(c) (5 p.) Calculate matrix A^{2015}

Note: it is recommended not to compute high powers of numbers and leave expressions like 2^{100} "as is".

Решение. (Приводится только на русском языке)

(a) [1] Собственные числа получаем из $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & -16 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Очевидно, что $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

[2] Собственные векторы, к примеру:
$v_1 = (1 \quad 0 \quad -2), v_2 = (4 \quad 1 \quad 0), v_3 = (0 \quad 0 \quad 1)$

(b) [2] $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -4/3 & 16/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

(c) [5] $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -16 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$A^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2015} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2015} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & -4+4*2^{2015} & 0 \\ 0 & 2^{2015} & 0 \\ -2+2*3^{2015} & 8-8*3^{2015} & 3^{2015} \end{pmatrix}$$

Критерии.

1. *Первая задача. Правильное решение. Собственные числа — 1 балл, собственные вектора — 2 балла.*
2. *Вторая задача, правильное решение — 2 балла.*
3. *Третья задача, правильное решение — 5 баллов.*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

3. Find the extremum of the following function: $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Решение. (Приводится только на русском языке)
Найдем точки, подозрительные на экстремум, решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Получим точки со следующими координатами: $(0,0);(1,1)$.

Далее необходимо проверить выполнение условий второго порядка. Для этого найдем матрицу вторых производных исследуемой функции:

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Проверим знакоопределенность этой матрицы в каждой из найденных подозрительных точек.

Для точки с координатами $(0;0)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, $0-9^2<0$. Следовательно, точка с координатами $(0;0)$ не является точкой экстремума.

Для точки с координатами $(1;1)$ имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Очевидно, $6>0$, $6 \cdot 6-3^2>0$. Следовательно, точка с координатами $(1;1)$ является точкой минимума. Значение функции в этой точке: F(x,y)=-1.

Критерии.

1. *Составление системы уравнений: 1 балл.*
2. *Нахождение точек, подозрительных на экстремум: 2 балла.*
3. *Составление матрицы вторых производных: 1 балл.*
4. *Правильная классификация первой точки: 3 балла.*
5. *Правильная классификация второй точки: 3 балла.*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

4. Let $(x,y) = 4 + e^{x+y} - 2e^x - e^y$. Find the conditional extremum if $F(x,y) = e^x + e^y - a = 0$. At what value of «a» the extremum exist. Discover type of the extremum.

Решение. (Приводиться только на русском языке)

Ключевые этапы:

1. Поскольку экспонента – монотонная функция, можно заменить переменные $e^x \to u, e^y \to v$
2. Путем несложных алгебраических преобразований приходим к задаче $f(u,v) = (u-1)(v-2)+2, F(u,v) = u+v-a = 0$

Дальнейшее решение осуществляется методом множителей Лагранжа. Лагранжиан: $L(u,v) = f(u,v) + \lambda F(u,v)$. В результате $u = \frac{a-1}{2}, v = \frac{a+1}{2}, \lambda = \frac{a-3}{2}$. Матрица окаймленного Гессиана: $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, det(H) = 2 > 0$. Таким образом, условный экстремум является максимумом и существует при всех значениях параметра.

Критерии.

4. *Правильное решение без предварительных преобразований — 5 баллов (за усердие).*
5. *Правильное решение с использованием одного из преобразований — 7 баллов.*

6. *Правильное решение с использованием обоих преобразований — 10 баллов.*
7. *Отсутствие анализа типа экстремума — снятие двух баллов.*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

5. Solve the differential equation $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$

Решение. (Приводится только на русском языке)

Характеристическое уравнение (2 балла): $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$

Корни (2 балла): $\lambda = 2 + 2i, \lambda = 2 - 2i$

Общее решение однородного уравнения (2 балла): $y(x) = e^{2x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$

Подбор частного решения вида $K_1 e^{2x}$ (2 балла)

Подбор частного решения вида $K_2\cos(2x) + K_3\sin(2x)$ (2 балла)

Ответ: $y(x) = e^{2x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{20}\sin(2x)$

Критерии.

1. *Характеристическое уравнение — 2 балла*
2. *Нахождение корней характеристического уравнения — 2 балла*
3. *Общее решение однородного уравнения — 2 балла*
4. *Подбор частного решения вида* $K_1 e^{2x}$ *— 2 балла*
5. *Подбор частного решения вида* $K_2\cos(2x) + K_3\sin(2x)$ *— 2 балла*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

6. There are two researchers in the laboratory. Both researchers send one paper each to an international scientific journal. The paper submitted by the first researcher will pass some general criteria and enter the reviewing process with probability $p = \frac{1}{2}$. The paper submitted by the second researcher will enter the reviewing process with probability $q = \frac{3}{4}$. If a paper enters the reviewing process, it gets published with probability $\frac{1}{2}$ and is rejected otherwise; papers that do not enter the reviewing process are immediately rejected. The event that a researcher's paper enters the reviewing process and the event that it passes it successfully are independent from these events for the other researcher.
1. Find the probability that at least one researcher from the laboratory will publish a paper in the international scientific journal.
2. It is known, that only one researcher was successful in publishing his paper in the international scientific journal. Find the probability, that it was the second researcher.

Решение. (Приводиться только на русском языке)

1. Вычислим вероятность события B, состоящего в том, что ни один исследователь не опубликовал статью в научном журнале. Первый ученый не сможет опубликовать статью, если она будет отвергнута на предварительном этапе, или если она успешно пройдет первый этап, но будет отклонена при рецензировании. Вероятность этого события B_1 равна $P(B_1) = (1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Аналогично, вероятность того, что статья второго ученого не будет опубликована (событие B_2)

равна $\mathrm{P}(B_2) = (1 - \frac{3}{4}) + \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. События B_1 и B_2 независимые, поэтому $P(B) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(B_2) = \frac{15}{32}$. Значит, вероятность события А, при котором хотя бы одна статья будет опубликована, равна, $P(A) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32}$.

2. По определению условной вероятности, вероятность того, что первый ученый публикует статью (событие C_1) при условии, что только один ученый опубликовал статью (событие C) равна

$$P(C_1|C) = \frac{P(CC_1)}{P(C)} = \frac{P(C_1B_2)}{P(C_1B_2) + P(C_2B_1)} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{5}{8} + \frac{3}{4} * \frac{1}{2} * \frac{3}{4}} = \frac{5}{14}.$$

Критерии.

1. *За первый пункт начисляется 5 баллов. За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За неучет того, что в понятие “хотя бы один” входит вариант, что оба ученых могут опубликовать работу, снимается 2 балла.*
2. *За второй пункт дается 5 баллов. За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За неправильную запись формулы – от 2 до 5 баллов.*
   Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

7.

1. Calculate the derivative of the function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by the formula
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
2. Is it true that for any n the n^{th} derivative of $f(x)$ is a continuous function?

Решение. (Приводится только на русском языке)

1. Производная функции, если $x \neq 0$:
$$f'(x) = 2\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^3}$$
Производная функции, если $x = 0$:
$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\Delta x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{\exp(t^2)} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2t\exp(t^2)} = 0$$
2. По индукции легко проверить, что производная функции $f(x)$ степени n при $x \neq 0$ имеет вид $f^{(n)}(x) = g(m(x))$, где $g(t) = h_n(t)\exp(-t^2)$, $h_n(t) -$ многочлен степени $3n$, а $m(x) = \frac{1}{x}$. Соответственно, $g(t)$ непрерывна как произведение непрерывных функций, а сама $f^{(n)}(x)$ – как композиция непрерывных функций.
Докажем, также по индукции, что $f^{(n)}(x) = 0$. При $n = 0$ это утверждение верно; пусть верно для n.
$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(\Delta x) - f^{(n)}(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{t \to \infty} th_n(t)\exp(-t^2) = 0,$$

что и требовалось доказать.
Поскольку $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, функция $f^{(n)}(x)$ непрерывна.

Критерии

1. *Правильное нахождение производной в точке отличной от нуля – 3 балла*
2. *Правильное нахождение производной в точке ноль – 3 балла*
3. *Доказательство непрерывности производной – 4 балла*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

8. Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Find

1) A symmetric positive semi-definite matrix B, such that $A = B \times B$
2) A symmetric positive semi-definite matrix C, such that $A^{-1} = C \times C$

Решение. (Приводится только на русском языке)

- Характеристический многочлен: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 1$
- Характеристическое уравнение: $(4-\lambda)^2 - 1 = 0$
- Собственные числа: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$.
- Собственные вектора:
    - for $\lambda_1 = 3$: $h_1 = (1 \quad -1)^T$, нормализованный собственный вектор: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -1)^T$.
    - for $\lambda_2 = 5$: $h_2 = (1 \quad 1)^T$, нормализованный собственный вектор: $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)^T$.
- Матрица Q: $AQ = Q\Lambda$ имеет вид $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
    - Тогда $A = Q\Lambda Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$.
    - Верно, что $\forall p \in \mathbb{R} \quad A^p = Q\Lambda^p Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^p & 0 \\ 0 & 5^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$.
- Поэтому:
    - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-1} & 0 \\ 0 & 5^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4/15 & -1/15 \\ -1/15 & 4/15 \end{pmatrix}$
    - $A^{1/2} = Q\Lambda^{1/2}Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{1/2} & 0 \\ 0 & 5^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{5} & \sqrt{3}-\sqrt{5} \\ \sqrt{3}-\sqrt{5} & \sqrt{3}+\sqrt{5} \end{pmatrix}$
    - $A^{-1/2} = Q\Lambda^{-1/2}Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-1/2} & 0 \\ 0 & 5^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{5} & \sqrt{3}-\sqrt{5} \\ \sqrt{3}-\sqrt{5} & \sqrt{3}+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Критерии
Правильное выполнение любого пункта – 5 баллов
Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

9. The number of minutes, which a panda spends on bamboo eating, has exponential distribution with parameter λ, the density function is $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. You have 100 identically and independently distributed observations from the exponential distribution. The total sum of minutes from this sample is 75.

1. Estimate parameter λ using maximum likelihood method.
2. Build 90% (maybe asymptotic) confidence interval for parameter λ. Explain how the width of the confidence interval is connected with confidence level.

Решение. (Приводится только на русском языке)

1. Запишем функция правдоподобия для всей выборки:
   $L = \prod_{i=1}^{100}\left(\lambda e^{-\lambda x_i}\right)$, $L = \lambda^{100} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{100} x_i}$
   Прологарифмируем функцию правдоподобия, так как при логарифмировании максимум функции сохранится:
   $$ln(L) = 100ln(L) - \lambda \sum_{i=1}^{100} x_i$$
   Возьмем первую производную и приравняем ее к нулю:
   $$\ln L' = \frac{100}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{100} x_i = 0$$
   Отсюда легко выразить необходимое значение:
   $$\hat{\lambda} = \frac{100}{\sum_{i=1}^{100} x_i} = 1\frac{1}{4}$$
   Проверим условие второго порядка:
   $\ln L'' = -\frac{100}{\hat{\lambda}^2} < 0$. Необходимое и достаточное условие выполнены, соответственно, это точка максимума функции.

2. Асимптотический доверительный интервал будет выглядеть следующим образом:
   $[\hat{\lambda} - z_{crit}\sqrt{Var(\hat{\lambda})}; \hat{\lambda} + z_{crit}\sqrt{Var(\hat{\lambda})}]$
   Значение оценки параметра известно из пункта 1, $z_{crit} = 1.645$ легко получить из таблицы критических значений для стандартного нормального распределения.
   Рассчитаем оценку дисперсии полученной оценки через оценку информации Фишера.
   $$Var(\hat{\lambda}) = \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \hat{\lambda}^2}\right)^{-1} = \frac{\hat{\lambda}^2}{100} \approx 0.0134$$

Таким образом, доверительный интервал выглядит следующим образом:

$$[1.3334 - 0.022043; 1.3334 + 0.022043]$$

$$[1.311; 1.355]$$

Ширина доверительного интервала положительно зависит от уровня доверия. Чем больше уровень доверия, тем шире интервал.

Критерии.

1. *За первый пункт – 5 баллов. Правильная запись функции правдоподобия – 2 балла. Ее максимизация – 2 балла. Проверка условия второго порядка – 1 балл. Арифметическая ошибка – штраф 1 балл.*
2. *За второй пункт – 5 баллов. Нахождение дисперсии оценки – 2 балла. Определение функции распределения параметра λ и нахождение критического значения – 2 балла. Итоговый расчет доверительного интервала. Арифметическая ошибка – штраф 1 балл.*
   Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

10. Manager of a firm is interested in maximizing revenue from sales of a manufactured commodity. Varying price from 10 rubles per unit to 20 rubles per unit, the manager recorded sales volumes. He uses two models for description of the dependence of sales volume on price:
$q_t = a + bp_t + v_t$ (1)
$ln(q_t) = a + bln(p_t) + v_t$ (2)
Here are the results of parameter estimation.
For model (1):

Variable	Coefficient	Standard error	t-statistics	p-level
Const	2531.4	152.6	16.59	0.00
p_t	–131.6	11.2	11.75	0.00

For model (2):

Variable	Coefficient	Standard error	t-statistics	p-level
Const	14.2	0.52	27.3	0.00
p_t	-2.5	0.21	11.9	0.00

Find the optimal price, which maximizes sales revenue, in accordance with model (1) and model (2). Compare recommendations.

Решение. (Приводится только на русском языке)

Следуя первой модели менеджеры получают следующее выражение для величины дохода $REV = p_t q_t = p_t(2531.4 - 131.6p_t)$ Отсюда оптимальная величина цены определяется следующим соотношением $p_{t,opt} = \frac{2531.4}{2*131.6} = 9.6$ руб. за штуку
Следуя второй модели, менеджеры приходят к соотношению $REV = p_t e^{14.2 - 2.5ln(p_t)} = e^{14.2} p_t{}^{-1.5}$. Отсюда следует, что доход растет с падением цены.
Сравнивая результаты, можно отметить, что в обоих случаях для решения поставленной задачи требуется снизить цену.

Критерии.

1. *Решение для первой модели – 4 балла.*

2. *Решение для второй модели – 4 балла.*
3. *Сравнение – 2 балла.*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

Методические рекомендации
по направлению «Математические методы в экономике»

1.Линейная алгебра.
1.1. Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение.
1.2. Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по строке и по столбцу.
1.3. Транспонированная матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матрицы.
1.4. Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.
1.5. Собственные числа и собственные векторы матрицы.
1.6. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.

2. Математический анализ.
2.1. Функции одной переменной. Предел функции. Производные. Разложение функции в ряд Тейлора. Исследование и построение графика функции.
2.2. Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных.
2.3. Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Примеры экономических приложений. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа и ее стационарные точки. Максимизация полезности и бюджетное ограничение. Окаймленный Гессиан. Условия второго порядка.

3. Дифференциальные уравнения.
3.1. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциа-лах. Метод замены переменных. Уравнение Бернулли.
3.2. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации постоян-ной.
3.3. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения.
3.4. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

4. Теория вероятностей.
4.1. Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и случайные величи-ны. Функция плотности распределения. Совместное распределение нескольких случай-ных величин. Условные распределения.
4.2. Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания, дисперсии и коварици. Условное математическое ожидание.
4.3. Нормальное распределение и связанные с ним хи-квадрат распределение, распределения Стьюдента и Фишера, и их основные свойства. Статистические таблицы и их использование. 2

5. Математическая статистика.
5.1. Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочное характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции). Корреляционная связь.
5.2. Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал.
5.3. Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень доверия, уровень значимости, мощность критерия и P-value теста. Проверка значимости.
5.4. Линейная регрессионная модель для случая одной и нескольких объясняющих переменных. Теоретическая и выборочная регрессии. Природа случайной составляющей. Линейность по переменным и параметрам.
5.5. Оценивание параметров. Метод наименьших квадратов (МНК). Свойства оценок параметров, полученных по МНК. Разложение суммы квадратов отклонений. Дисперсионный анализ. Степень соответствия линии регрессии имеющимся данным. Коэффициент детерминации и его свойства.
5.6. Классическая линейная регрессия. Статистические характеристики (математиче-ское ожидание, дисперсия и ковариация) оценок параметров. Теорема Гаусса-Маркова.
5.7. Предположение о нормальном распределении случайной ошибки в рамках классической линейной регрессии и его следствия. Доверительные интервалы оценок параметров и проверка гипотез об их значимости. Проверка адекватности регрессии. Прогнозирование по регрессионной модели и его точность.

Литература (разделы из учебников, соответствующие программе)

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Теория вероятностей и прикладная статистика. / Том
1. М.: Юнити-Дана, 2001.
2. Айвазян С.А. (2001). Прикладная статистика. Основы эконометрики. Том 2. – М.: Юнити-Дана, 2001.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнения по математическому анализу. М.: ООО «Изда-тельствао АСТ», 2003
4. Ильин В.А., Ким Г.Д., Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2008.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2006.
6. Катышев П., Магнус Я., Пересецкий А., Головань С. Сборник задач к начальному курсу эко-нометрики. 4-е дополненное и переработанное издание. Москва, Дело. 2007.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, тт.1,2,3.М.:Дрофа, 2003.
8. Магнус Я., Катышев П., Пересецкий А. Эконометрика. Начальный курс. 8-е исправленное издание. Москва, Дело, 2007.
9. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р. Теория вероятностей и статистика - 2-е изд.,перераб. М.: МЦНМО, 2008.
10. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Регулярная и хаотиче-ская динамика, 2004.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт.1-3. М.: Физ-матлит, 2006.
12. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, тт.1,2. М.: Физматлит, 2002.
13. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2005.
14. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика-2 (промежуточный уровень) Москва: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2007.
15. Chiang A.C. Fundamental methods of matematical economics. McGrow Hill, 1984.
16. Simon C.P., Blum L. Mathematics for Economists. WW Norton & Company. NY–London, 1994.