

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Найдите все тройки действительных чисел  $(x, y, z)$ , удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^3 = 1; \\ xy^5 z^3 = 2; \\ xy^3 z^5 = 3. \end{cases}$$

2. Дан треугольник  $ABC$ ,  $\angle B = 90^\circ$ . На сторонах  $AC$ ,  $BC$  выбраны точки  $E$  и  $D$  соответственно, такие, что  $AE = EC$ ,  $\angle ADB = \angle EDC$ . Найти отношение  $CD : BD$ .

3. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты (Э) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\begin{array}{ccccc} \text{Б} & \xleftrightarrow{\frac{2}{1}} & \text{К} & \quad \text{Э} & \xleftrightarrow{\frac{6}{1}} & \text{Б} & \quad \text{Э} & \xleftrightarrow{\frac{11}{1}} & \text{К} & \quad \$ & \xleftrightarrow{\frac{10}{1}} & \text{К} & \quad \$ & \xleftrightarrow{\frac{5}{1}} & \text{Б} \\ & \xleftarrow{\frac{1}{2}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{6}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{11}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{15}} & & & \xleftarrow{\frac{1}{7}} & \end{array}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов или 5 бананов, а один кокос — на  $\frac{1}{15}$  доллара, или на  $\frac{1}{11}$  енота, или на  $\frac{1}{2}$  банана. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять  $101/43$  енота на  $606/43$  банана). Обмены  $\$ \leftrightarrow \text{Э}$  в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

4. Даны три точки  $A, B, C$ , образующие треугольник с углами  $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ . Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвертую точку  $D$ . С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество различных точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

5. Приведите пример функции  $f(x)$ , для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции  $f(x)$  — множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ ,
- при любом  $b \in \mathbb{R}$  уравнение  $f(x) = b$  имеет ровно одно решение,
- при любом  $a > 0$  и любом  $b \in \mathbb{R}$  уравнение  $f(x) = ax + b$  имеет не менее двух решений.

6. а) Найти хотя бы два различных натуральных числа  $n$ , для каждого из которых число  $n^2 + 2015n$  является точным квадратом натурального числа.

б) Найти количество всех натуральных чисел  $n$ , для каждого из которых число  $n^2 + 2015n$  является точным квадратом натурального числа.