

1. Родник даёт бочку воды за 24 минуты. Сколько бочек воды даёт родник за сутки?

Ответ. 60

Решение. В сутках 24 часа, то есть, $24 \cdot 60$ минут. Значит, за сутки родник даёт в 60 раз больше воды, чем за 24 минуты, то есть, 60 бочек.

Критерии.

(-) Только ответ

(-.)

(-/+) Ошибка в вычислениях

(+/2)

(+/-) Верные вычисления без объяснений

(+.)

(+)

2. Натуральные числа x и y таковы, что верно равенство

$$x^2 - 3x = 25y^2 - 15y.$$

Во сколько раз число x больше числа y ?

Ответ. 5

Решение. Равенство $x^2 - 3x = 25y^2 - 15y$ равносильно равенству $(5y - x)(5y + x - 3) = 0$. Поскольку x и y натуральны, то $x, y \geq 1$. Значит, вторая скобка $5y + x - 3 \geq 3$, в частности, не нулевая. Поэтому в ноль обращается первая скобка $5y - x$, то есть x в 5 раз больше y .

Критерии.

(-)

(-) Рассмотрен пример конкретных чисел.

(-/+) Из равенства $x(x - 3) = 5y(5y - 3)$ сделан вывод $x = 5y$, без удовлетворительных объяснений.

(+/2) Выделен полный квадрат справа и слева, но сделан неверный вывод $(x - 1.5)^2 = (5y - 1.5)^2 \Rightarrow x - 1.5 = 5y - 1.5$. Второй случай $(x - 1.5) = -(5y - 1.5)$ не рассмотрен.

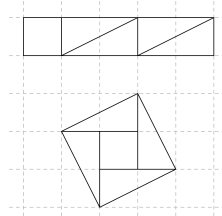
(+/-) Получено равенство $(x - 5y)(x + 5y - 3) \neq 0$, из которого делается вывод о том, что $x - 5y = 0$, но не написано, почему $(x + 5y - 3) \neq 0$.

(+) Пропущены незначительные логические шаги

(+)

3. Одна сторона прямоугольника в 5 раз длиннее другой. Покажите, как разрезать этот прямоугольник на 5 частей и сложить из них квадрат. Части можно переворачивать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата не должно быть непокрытых участков.

Ответ. См. рисунок.



Критерии.

(-)

(-.)

(-/+) Верная идея разрезания, но размеры частей неправильные.

(+/2)

(+/-) Приведён верный способ разрезания и приблизительно верно указаны размеры частей, но не указан способ складывания квадрата.

(+.) Прямоугольник разрезан верно, квадрат сложен, но не указаны относительные размеры частей, т.е. не хватает точности в описании разрезов, или части неверно пронумерованы.

(+)

4. Петя, Саша и Миша играют в теннис на вылет. Игра на вылет означает, что в каждой партии играют двое, а третий ждёт. Проигравший партию уступает место третьему и в следующей партии сам становится ждущим. Петя сыграл всего 12 партий, Саша — 7 партий, Миша — 11 партий. Сколько раз Петя выиграл у Саши?

Ответ. 4

Решение. Найдем сначала общее количество сыгранных партий. Петя, Паша и Миша в сумме участвовали в $12 + 7 + 11 = 30$ партиях. В каждой партии два участника, поэтому количество партий в два раза меньше: $30/2 = 15$.

Значит, Петя *не* участвовал в $15 - 12 = 3$ партиях, Паша — в $15 - 7 = 8$ партиях, Миша — в $15 - 11 = 4$ партиях.

Заметим теперь, что при игре втроем на вылет один игрок не может пропустить две партии подряд. Поскольку Паша не участвовал в 8 партиях из 15, то стало быть, он не участвовал в самой первой и затем пропускал каждую вторую партию. Это означает, что Паша проиграл все свои партии.

Значит, количество побед Пети над Пашей равно количеству партий, в которой встречались Петя с Пашей. А это количество равно количеству партий, в которых не участвовал Миша, то есть 4, как найдено ранее.

Критерии.

(−) Частный случай с верным ответом,

или

доказано, что сыграно 15 партий.

(−/+) Частный случай с верным ответом + доказано, что сыграно 15 партий

(+/2) Доказано, что Саша проиграл все партии, и правильный ответ на конкретном примере, без достаточного обоснования.

(+/-)

(+.) Задача решена верно с одним недостатком: нет строгого доказательства того, что было сыграно 15 партий.

(+) Верный и строго обоснованный ответ.

5. Незнайка придумал себе развлечение. Он пишет на доске выражение

$$((((0\dots)\dots)\dots)\dots),$$

причём количество скобок он выбирает по своему желанию. Затем вместо каждого многоточия он вписывает знак плюс или умножить и натуральное число от 1 до 9, причём каждое число — не более одного раза, а затем вычисляет значение получившегося выражения. Например он может написать такое выражение:

$$(((0 + 2) \cdot 3) + 8) = 14,$$

или такое

$$(((((((0 \cdot 7) + 3) + 4) + 1) \cdot 2) \cdot 5) \cdot 6) + 9) = 105,$$

или такое

$$(((((((0 + 3) \cdot 9) \cdot 8) + 7) \cdot 6) \cdot 4) + 5) = 5357.$$

Но он не может написать

$$((((0 + 7) \cdot 3) + 4) \cdot 7) + 5),$$

потому что число 7 здесь использовано два раза.

Незнайка хочет написать выражение, в результате вычисления которого получилось бы 2015. Помогите ему это сделать.

Ответ. Один из возможных ответов: $(((((0 + 3) + 2) \cdot 8) + 4) \cdot 9) + 7) \cdot 5) = 2015$

Решение.

Критерии.

(-) Неправильный ответ.

(-.)

(-/+)

(+/2)

(+/-)

(+.) Из решения видно, что автор понимал правильный ответ, но в самом ответе допущена опечатка.

(+) Правильный ответ.

6. Дан треугольник ABC , в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 90^\circ$. В нём проведена высота BH . На стороне CA выбрана точка P так, что $AP = AB$, на стороне CB выбрана точка Q так, что $BQ = BH$. Доказать, что прямые PQ и AB параллельны.

Решение. Докажем, что BP — биссектриса угла HBC . Действительно,

$$\begin{aligned}\angle HBP &= 180^\circ - \angle BHP - \angle HPB && \text{(по теореме о сумме углов треугольника)} \\ &= 90^\circ - \angle APB && \text{(так как } BH \text{ — высота)} \\ &= 90^\circ - \angle ABP && \text{(по свойству равнобедренного треугольника } ABP \text{)} \\ &= \angle ABC - \angle ABP && \text{(так как } \angle ABC \text{ — прямой)} \\ &= \angle CBP.\end{aligned}$$

Значит, треугольники HBP и QBP равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle BQP = \angle BHP = 90^\circ = \angle ABC$. По признаку параллельности получаем $PQ \parallel AB$.

Критерии.

(-)

(-.)

(-/+) Решение по сути верное, но ошибки в вычислении углов

или

доказано, что BP — биссектриса $\angle HBC$, другие продвижения отсутствуют.

(+/2)

(+/-)

(+.)

(+) Верное решение с обоснованием всех шагов.