Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2015 г.
по направлению «Математика»

Профили:
«Mathematics»
«Математика и математическая физика»

Критерии. Полный балл за каждую задачу составляет 20 баллов. В целом, мы руководствовались следующими критериями проверки.

$+$ **(100% полного балла)** Полное верное решение с правильным ответом.

$\pm$ **(75% полного балла)** Правильный ход решения с легко устранимой ошибкой или пробелом.

$\mp$ **(25% полного балла)** Ошибочное или незавершённое решение, содержащее продуктивные идеи.

$-$ **(0% полного балла)** Правильный ход решения с легко устранимой ошибкой или пробелом.

Дополнительные критерии по отдельным задачам указаны после решения. Баллы за отдельные пункты округлялись вверх до ближайшего целого числа.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ / COMMON PART

1. На стрелочных часах по ошибке установили две одинаковые стрелки, но идут они точно. Сколько раз за 12 часов невозможно определить однозначно реальное время по этим часам?

1. A clock is made by mistake so that both the hour hand and the minute hand look the same; however, the clock works perfectly well. How many times during 12 hours is it impossible to determine the actual time by this clock?

Решение. Будем измерять положение стрелок в долях полного оборота. Тогда если часовая стрелка находится в положении t, минутная должна находиться в положении $\{12t\}$. Тем самым, поменять стрелки, оставляя показания часов возможными, можно тогда и только тогда, когда $t = \{12\{12t\}\}$, $0 \le t < 1$. Заметим, что так как $\{12t\}$ отличается от $12t$ на целое число, имеем $\{12\{12t\}\} = \{144t\}$, то есть наше уравнение можно записать в виде $t = 144t - k$, где k целое, $0 \le t < 1$. Тогда $143t = k$, и значения k от 0 до 142 включительно задают ровно 143 решения данного уравнения в указанном интервале.

При этом среди рассмотренных есть случаи, не удовлетворяющие условию задачи, а именно, когда стрелки совпадают, то есть замена стрелок не меняет показываемое время. Это соответствует решению уравнения $t = \{12t\}$, $0 \le t < 1$, которое аналогичным способом приводится к виду $11t = k$, и, тем самым, имеет 11 решений.

Таким образом, ответом служит разность полученных чисел $143 - 11 = 132$.

Критерии:

$\pm$ **(15 баллов)** Решение без учёта случая совпадения стрелок.

2. Пусть A и B — матрицы 2015×2015 ранга 100 и 1000, соответственно. Чему может равняться ранг матрицы

a) $AB - BA$;
b) $AB + BA$.

2. Let A and B be 2015×2015-matrices of rank 100 and 1000, respectively. Find all possible values for the ranks of the following matrices:

a) $AB - BA$;
b) $AB + BA$.

Решение. Поскольку $\mathrm{rk}(AB) \le \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$, $\mathrm{rk}(A+B) \le \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$, имеем ограничение $\mathrm{rk}(AB \pm BA) \le 200$. Покажем, что всякое значение $0 \le r \le 200$ может быть реализовано в обоих пунктах задачи.

За $e_1, \dots, e_{2015}$ обозначим базис, в котором мы зададим матрицы A и B. Пусть A переводит базисные векторы e_i, $i = 1 \dots 100$, в e_i, а остальные базисные векторы в ноль, тогда $\mathrm{rk}(A) = 100$.

Для $r \le 100$ пусть B переводит e_{i+1000} в e_i для $i = 1 \dots r$, e_{i+1000} в себя для $i = (r+1) \dots 1000$, а остальные базисные векторы в ноль. Тогда образ B является подпространством, натянутым на 1000 векторов (e_i для $i \in \{1 \dots r\} \cup \{r + 1001 \dots 2000\}$) тем самым, $\mathrm{rk}(B) = 1000$. Образ $AB \pm BA$ является подпространством, натянутым на векторы e_i для $i = 1 \dots r$, тем самым, $\mathrm{rk}(AB \pm BA) = r$.

Для $100 < r \le 200$ пусть B переводит e_i в e_{100+i} для $i = 1 \dots r - 100$, e_{i+1000} в e_i для $i = 1 \dots 100$, e_{i+1000} в себя для $i = (r+1) \dots 1000$, а остальные базисные векторы в ноль. Тогда образ B является подпространством, натянутым на 1000 векторов (e_i для $i \in \{1 \dots r\} \cup \{r + 1001 \dots 2000\}$). тем самым, $\mathrm{rk}(B) = 1000$. Образ $AB \pm BA$ является подпространством, натянутым на векторы e_i для $i = 1 \dots r$, тем самым, $\mathrm{rk}(AB \pm BA) = r$.

Таким образом, в обоих пунктах ранг может принимать любое значение от 0 до 200.

Критерии:

+/2 **(10 баллов)** Верный ответ и доказательство неравенства на ранг без примеров матриц.

+/2 **(10 баллов)** Верный ответ и полный набор примеров матриц без доказательства неравенства на ранг.

3. Гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через начало декартовой прямоугольной системы координат Oxy, обладает следующим свойством: если в ее произвольной точке M провести нормаль к этой кривой до пересечения с осью Ox в точке M', то середина отрезка MM' будет лежать на параболе $y^2 = x$. Напишите дифференциальное уравнение этой кривой и найдите его решение.

3. A smooth curve in $\mathbb{R}^2$ through the origin of an orthogonal Cartesian coordinate system (x, y) has the following property: the normal line of this curve at any point M of the curve intersects the x-axis at a point M' such that the midpoint of the line segment MM' belongs to the parabola $y^2 = x$. Write down a differential equation for this curve and find its solution.

Решение. Заметим, что условие задачи исключает вертикальные касательные, поэтому локально мы можем запараметризовать кривую в виде $y = f(x)$.

Направление касательной в точке $M = (x, f(x))$ задаётся вектором $(1, f'(x))$, тогда направление нормали соответствует вектору $(f'(x), -1)$, тем самым, нормаль состоит из точек $(x + tf'(x), f(x) - t)$. Точка M соответствует $t = 0$, пересечение с осью Ox соответствует $t = f(x)$, тем самым, точка M' соответствует $t = f(x)/2$ и имеет координаты $(x + f(x)f'(x)/2, f(x)/2)$. Условие задачи приводит к уравнению

$$f(x)f'(x)/2 - f(x)^2/4 + x = 0.$$

Для решения возьмём $g(x) = f(x)^2$. Тогда уравнение принимает вид линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $g'(x)/4 - g(x)/4 = -x$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $g'(x)/4 - g(x)/4 = 0$ составляют функции $C\exp(x)$, частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде многочлена первой степени, ему удовлетворяет многочлен $4x + 4$. Таким образом, $g(x)$ имеет вид $4x + 4 + C\exp(x)$. То, что кривая проходит через начало координат, позволяет вычислить $C = -4$, таким образом, получаем кривую

$$y^2 = 4x + 4 - 4\exp(x).$$

Критерии:

$+/2$ **(10 баллов)** Получено верное уравнение при отсутствии его решения или неустранимых ошибках в его решении.

4. Постройте область D (связное открытое множество) в $\mathbb{C}$, для которого число автоморфизмов (голоморфных обратимых отображений $D \to D$) равно

a) 2015;

b) 1.

4. Give an example of a domain D (an open connected set) in $\mathbb{C}$, for which the number of automorphisms (i.e., holomorphic invertible mappings $D \to D$) equals

a) 2015;

b) 1.

Решение. В качестве примеров будем рассматривать единичный диск D с проколами $\{z \,|\, |z| < 1\} \setminus \{p_1, \ldots .p_n\}$. Всякий автоморфизм такой фигуры задаётся ограниченной голоморфной фунцией, тем самым, она имеет устранимые особенности и продолжается до автоморфизма всего единичного диска $D \to D$. При этом мы знаем, что автоморфизмы D задаются дробно-линейными отображениями $z \to \frac{az+b}{cz+d}$.

В пункте а) расположим $p_1, \ldots, p_{2015}$ в вершинах правильного 2015-угольника, вписанного в окружность $|z| = 1/2$. Автоморфизмы при этом будут поворотами на углы кратные $2\pi/2015$. Докажем, что других автоморфизмов нет. Заметим, что дробно-линейные отображения переводят окружности в окружности и прямые, при этом сохраняя углы между ними. В нашем случае автоморфизм будет дробно-линейным отображением, переводящим в себя единичную окружность окружность $|z| = 1/2$ (как единственную окружность, содержащую все проколы). Тогда он переводит 0 в 0 как пересечение общих перепендикуляров этих окружностей. Значит, по Лемме Шварца (её здесь можно заменить элементарными рассуждениями) он является поворотом, а чтобы проколы перешли в проколы требуется, чтобы угол был кратен $2\pi/2015$.

В пункте b) Достаточно расположить точки на этой окружности ассиметрично, например, в вершинах треугольника, не являющегося правильным. Тогда единственным автоморфизмом будет тождественное отображение.

Критерии:

$\pm$ **(15 баллов)** Верный пример при отсутствии доказательства отсутствия прочих автоморфизмов или неустранимых ошибках в доказательстве.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

According to the Master of Science program of your choice, please solve <u>only one</u> block from the following.

1. «Mathematics»

1. Prove that a non-degenerate degree two algebraic curve in the plane passing through the vertices of a non-right angled (acute or obtuse) triangle and the intersection point of its altitudes is an isosceles hyperbola, i.e., a hyperbola, whose asymptotic directions are perpendicular.

Решение. Заметим, что перпендикулярность асимптот у гиперболы $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ соответствует тому, что $a+c=0$. И наоборот, решение $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ — равносторонняя гипербола или её вырождение (пара перпендикулярных прямых или одна прямая). Действительно, такое происходит, когда при приведении кривой к главным осям $\alpha z^2+\beta w^2+\gamma$ диагональные элементы α и β имеют противоположный знак, то есть, матрица квадратичной формы имеет нулевой след. А это свойство сохраняется при ортогональных заменах координат.

Теперь заметим, что кривые, проходящие через эти 4 точки образуют пучок квадрик — их уравнения образуют векторное пространство. Поскольку точки не лежат на одной прямой, размерность этого пространства равна 2 (т.к. добавление пятой точки задаст кривую с точностью до пропорциональности, то есть уменьшит размерность до 1). В качестве базиса можно выбрать пару непропорциональных уравнений, в частности, выбрать пару сторон и взять произведение уравнений соответствующей стороны и опущенной на неё высоты. Поскольку обе базисных кривые удовлетворяют условию равносторонности ($a+c=0$), это же верно для любой их линейной комбинации, то есть кривой, удовлетворяющей условию задачи.

Критерии:

+/2 **(10 баллов)** Получен критерий равносторонности гиперболы без дальнейших шагов решения.

2. For a fixed positive integer k, define the sequence a_n by the formula $a_n = 2^{2^n}+k$. Prove that the double sequence $\gcd(a_n, a_m)$ is unbounded. Recall that $\gcd(a, b)$ stands for the greatest common divisor of two integers a and b.

Решение. Разумеется, в задаче подразумевалось $\gcd(a_n, a_m)$ для $n \neq m$. Тем, кто обратил внимание на неточность формулировки, начисленно 5 баллов из 20.

Пусть $\gcd(a_n, a_m)$ ограничено числом M.

1) Сведём задачу к случаю, когда k является степенью 2.

Лемма Если $p \neq 2$ — простое число, a_n делится на p^m, но при этом p не сравним с 1 по модулю 2^n. Тогда существует бесконечно много $l > n$, для которых a_l делится на p^m.

Для доказательства заметим, что условию удовлетворяют такие l, что $2^{2^l}-2^{2^n}$ делится на p^m, то есть $2^{2^n}\left(2^{2^l-2^n}-1\right)$ делится на p^m. Поскольку порядок мультипликативной группы $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ равен $p^{m-1}(p-1)$, для этого достаточно, чтобы показатель 2^l-2^n делился на $(p-1)p^{m-1}$. Разложим $(p-1)p^{m-1}$ на множители $2^s t$, где t нечётно. Тогда, так как p не сравним с 1 по модулю 2^n, имеем $s < n$ и достаточно того, чтобы 2^l-2^n делилось на t. При этом 2 обратим в $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ поэтому остатки степеней 2 по модулю t будут периодичны без предпериода, и таких l будет бесконечно много. Лемма доказана.

Обозначим за A множество простых чисел, удовлетворяющих при неоторых m и n условию леммы. Из нашего предположения и утверждения леммы следует, что A конечно, и, более того, показатели, в которых элементы A входят в разложение a_n на простые множитили, ограничены.

Положим $a_n = 2^{\gamma_n}\beta_n\alpha_n$, где β_n — произведение простых чисел из A, α_n — произведение нечётных простых чисел не из A, то есть простых чисел заведомо сравнимых с 1 по модулю 2^n. Из предположения об ограниченности $\gcd(a_n, a_m)$ и леммы следует ограниченность β_n и γ_n, в частности, найдётся L для которого $2^{\gamma_n}\beta_n$ всегда меньше L.

Тогда, с одной стороны, a_n сравнимо с $2^{\gamma_n}\beta_n$ по модулю 2^n, с другой стороны, $a_n = 2^{2^n}+k$ сравнимо с k по модулю 2^n. Значит, для всякого n имеем $2^{\gamma_n}\beta_n$ сравнимо с k по модулю 2^n. Взяв n для которого $2^n > L$, получим $2^{\gamma_n}\beta_n = k$, откуда a_n делится на k, а значит и $2^{2^n} = a_n - k$ делится на k, то есть k является степенью 2.

2) Пусть $k = 2^d$, тогда $a_n = 2^d\left(2^{2^n-d}+1\right)$. Пусть 2 входит в разложение d на простые множители с показателем γ . Возьмём n достаточно большой, чтобы выполнялось $n > \gamma$ и $2^n > d$, и найдём бесконечно много $l > n$ для которых a_l делится на a_n. Для этого достаточно, чтобы $\left(2^{2^l-d}+1\right)$ делилось на $\left(2^{2^n-d}+1\right)$. Поскольку многочлен $x^{st}+1$ делится на x^t+1, подставляя $x = 2$, получим, что для этого достаточно чтобы $2^l - d$ делилось на $2^n - d$, что равносильно делимости $2^l - 2^n$ на $2^n - d$. Положим $2^n - d = 2^s t$, где t нечётно. Благодаря выбору достаточно большого n, имеем $s < n$, и достаточно, чтобы $2^l - 2^n$ делилось на t. При этом степени 2 по модулю t периодичны без предпериода, откуда таких l будет бесконечно много.

В силу неограниченности a_n, получаем противоречие с ограниченностью $\gcd(a_n, a_m)$.

Критерии:

$\mp$ **(5 баллов)** Отмечена неточность в формулировке задачи при отсутствии решения или ошибочном решении.

2. «Математика и математическая физика»

1. Точечная частица массы m на прямой находится в потенциале

$$U(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3,$$

в котором имеются два минимума (две «ямы»).

a) Найдите период колебаний частицы в левой яме при условии, что ее энергия $E = 0$;

b) Пусть энергия частицы равна E, причем $0 < E < 3$; тогда она может совершать колебания либо в левой, либо в правой яме. Как связаны между собой периоды этих колебаний?

Решение. Период T колебаний частицы массы m с полной энергией E в потенциальной яме $U(x)$ дается формулой

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

где x_1 и x_2 — координаты точек поворота: $U(x_1) = U(x_2) = E$. Данный в условии потенциал $U(x)$ допускает следующее разложение на множители:

$$U(x) = (x-1)^2(x+3-\sqrt{6})(x+3+\sqrt{6}).$$

а) Для колебаний в левой яме с нулевой полной энергией координаты точек поворота — отрицательные корни потенциала $U(x)$:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{|x-1|\sqrt{(x-x_-)(x_+-x)}}, \qquad x_\pm = -3 \pm \sqrt{6}.$$

Данный интеграл можно вычислить, например, методами теории функций комплескного переменного. Предаставим период T в виде контурного интеграла в комплексной плоскости по берегам разреза вещественной оси от точки x_- до точки x_+. Поскольку особенности на бесконечности отсутствуют, единственный полюс находится в точке $x = 1$, вычет в котором дает ответ:

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{5}}.$$

Критерии:

$+/2$ **(5 баллов за пункт)** Правильная формула для периода колебания при ошибке в дальнейших вычислениях б) Периоды колебаний в указанной в условии задачи ситуации совпадают. Действительно, уравнение $U(x) = E$ для $0 < E < 3$ имеет 4 различных вещественных корня $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Искомые периоды колебаний представляются контурными интегралами (см. пункт а) вокруг разрезов по отрезкам $[a_1, a_2]$ и $[a_3, a_4]$ соответственно. В силу отсутствия у подынтегрального выражения особенностей на бесконечности, контуры интегрирования могут быть продеформированы друг в друга, что ведет к совпадению соответствующих интегралов.

Критерии:

$+/2$ **(5 баллов за пункт)** Период представлен в виде контурного интеграла по берегам разреза между точками поворота, но вывод остутствует или ошибочен.

2. Жесткая непроводящая полусфера массы M и радиуса R может свободно перемещаться в пространстве. Полусфера несет заряд Q, равномерно распределенный по ее поверхности. В центре полусферы (в центре ее большого круга) расположен точечный заряд $-Q$, массы m. Какую минимальную скорость необходимо сообщить точечному заряду вдоль оси симметрии полусферы в противоположном от нее направлении, чтобы заряд мог удалиться от центра полусферы на расстояние R? Всеми силами, кроме электростатических, можно пренебречь.

Решение. Проще всего задача решается применением законов сохранения энергии и импульса. Для вычисления энергии взаимодействия заряда и полусферы, найдем потенциал электростатического поля $\Phi(r)$ на расстоянии r от центра сферы. Обозначим $\sigma = Q/(2\pi R^2)$ постоянную плотность заряда на поверхности сферы. Тогда искомый потенциал дается значением интеграла по поверхности полусферы:

$$\Phi(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{k\sigma R^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR\cos\theta}}\, d\theta = \frac{kQ}{Rr}\,(R + r - \sqrt{R^2 + r^2}).$$

Здесь коэффициент k зависит от выбранной системы единиц.

Обозначим величину искомой начальной скорости заряда буквой v. Максимальное удаление заряда от полусферы достигается в тот момент, когда его скорость относительно полусферы будет равна нулю. В этот момент полусфера и заряд движутся относительно неподвижной системы отсчета с некоторой одинаковой скоростью u. Скорость u находим из закона сохранения полного импульса системы заряд – полусфера

$$mv = Mu + mu, \qquad u = \frac{m}{M + m}\, v.$$

Согдасно требованию условия задачи, заряд в этот момент должен находиться на удалении R от центра полусферы. Записывая закон сохранения энергии для начального момента и момента максимального удаления, находим уравнения для определения скорости v:

$$\frac{mv^2}{2} - Q\Phi(0) = \frac{(M + m)u^2}{2} - Q\Phi(R).$$

Учитывая значения потенциала $\Phi(0) = Q/R$ и $\Phi(R) = (2 - \sqrt{2})Q/R$, получаем ответ:

$$v^2 = 2(\sqrt{2} - 1)\,\frac{(M + m)}{Mm}\,\frac{kQ^2}{R}.$$

Критерии:

$\mp$ **(5 баллов)** Правильная формула для потенциала на оси заряженной полусферы при неустранимых ошибках в дальнейшем решении.

$+/2$ **(10 баллов)** Верно определен момент максимального удаления заряда от сферы при неустранимых ошибках в дальнейшем решении.