Направление "Прикладная математика и информатика
Профиль "Прикладная математика и информатика"020

Время выполнения задания 240 минут.

Каждая задача оценивается в 15 баллов. В зачет идет минимум из суммы и 100 баллов.

Задача 1.

Найти, при каких целых значениях x *для функции* $F(x) = (x+1)^{-1} + \ln \operatorname{sh} x$, *где* $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, *справедливо неравенство* $F'' \geq 1 + x/2$.

Ответ: не существует таких значений x.

Решение.

Найдём область допустимых значений функции $F(x)$. Слагаемое $(x+1)^{-1}$ определено при $x \neq -1$. Второе слагаемое $\ln \operatorname{sh} x$ пределено при $\operatorname{sh} x > 0$, то есть при $e^x > e^{-x}$, что выполняется при $x > 0$. Таким образом область допустимых значений функции $F(x)$ – это область $\{x > 0\}$.

Найдём вторую производную $F(x)$.

$$F'(x) = -(x+1)^{-2} + \frac{\operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh} x} = -(x+1)^{-2} + \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

$$F''(x) = 2(x+1)^{-3} + \frac{\operatorname{ch}' x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh}^2 x} =$$
$$= 2(x+1)^{-3} + \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = 2(x+1)^{-3} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Здесь мы использовали, что $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Таким образом задача сводится к вопросу при каких натуральных значениях x выполняется неравенство $2(x+1)^{-3} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \geq 1 + x/2$. Однако при $x \geq 1$ имеем $2(x+1)^{-3} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} < 2(x+1)^{-3} \leq \frac{1}{4} < 1 + x/2$. То есть искомое неравенство никогда не выполняется.

Критерии №1:

0-1 – Верно посчитана $F'(x)$ – 1 балл; Была попытка решения, не доведенная до конца.

2 – Верно посчитана $F''(x)$.

3 – Верно посчитана $F''(x)$ и приведён верный ответ к неравенству $2(x+1)^{-3} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \geq 1 + x/2$ в целых числах – 3 балла.

4-5 – Верно найдено решение неравенства $2(x+1)^{-3} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \geq 1 + x/2$ в целых числах, но забыто ОДЗ.

6-13 – Баллы вычитались из 15 в зависимости от характера сделанных ошибок.

14-15 – Верное решение.

При наличии ошибок в каждом из случаев снимались баллы.

Задача 2.
Найти, при каких значениях параметра a интеграл неотрицателен $\int_1^{+\infty} \frac{1+ax^5e^{-x}-x}{x^3}\mathrm{d}x$.

Ответ: при $a \geq \frac{e}{10}$.

Решение. Возьмём для начала неопеределённый интеграл $\int \frac{1+ax^5e^{-x}-x}{x^3}\mathrm{d}x$. Разложим его в сумму трёх интегралов: $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x + a\int x^2e^{-x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Первый и третий интегралы табличные:

$$\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}; \quad ;\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}.$$

Второй интеграл возьмём два раза по частям:

$$\int x^2e^{-x}\mathrm{d}x = -\int x^2e^{-x}\mathrm{d}(-x) = -\int x^2\mathrm{d}e^{-x} =$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\mathrm{d}x = -x^2e^{-x} - 2\int x\mathrm{d}e^{-x} = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\mathrm{d}x =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2\int e^{-x}\mathrm{d}(-x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}.$$

Итого получаем $\int \frac{1+ax^5e^{-x}-x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2} - ax^2e^{-x} - 2axe^{-x} - 2ae^{-x} + \frac{1}{x}$.

Теперь переходим к определённому интегралу:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+ax^5e^{-x}-x}{x^3}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2x^2} - ax^2e^{-x} - 2axe^{-x} - 2ae^{-x} + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{+\infty}.$$

Заметим, что предел при $x \to +\infty$ у каждого слагаемого равен 0. Для тех слагаемых, для которых это не совсем очевидно, можно воспользоваться правилом Лапиталя. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Таким образом

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+ax^5e^{-x}-x}{x^3}\mathrm{d}x = 0 - (-\frac{1}{2} - ae^{-1} - 2ae^{-1} - 2ae^{-1} + 1) = 5ae^{-1} - \frac{1}{2}.$$

Имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+ax^5e^{-x}-x}{x^3}\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow 5ae^{-1} - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{e}{10}.$$

Критерии №2:
0-2 – Идея интегрирования по частям.
2-4 – Подсчёт только простых слагаемых.
5-8 – Неарифметическая ошибка в процессе подсчёта интеграла по частям.
9-11 – Ошибка в подсчёте простых двух интегралов.
12-13 – Арифметическая ошибка после верного подсчёта трёх слагаемых интегралов.
14-15 – Верное решение.
При наличии ошибок в каждом из случаев частично снимались баллы.

Задача 3.

На плоскости задана декартова система с координатами x, y. При каких значениях вещественного параметра a окружность $x^2+y^2=4$ имеет хотя бы одно пересечение с прямой $ax+y=a^2$?

Ответ: При $a \in \left[-\sqrt{2+2\sqrt{2}}, \sqrt{2+2\sqrt{2}}\;\right]$ прямая и окружность имеет хотя бы одно пересечение.

Решение: Прямая и окружность пресекаются тогда и только тогда, когда существует точка (x,y) такая, что справедлива система

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ ax+y=a^2, \end{cases}$$

то есть когда точка одновременно принадлежит и заданной окружности, и прямой.

Выразив y через x из уравнения прямой ($y=a^2-ax$) и подставив в уравнение окружности, получаем

$$(1+a^2)x^2-2a^3x+a^4-4=0.$$

Это квадратное уравнение относительно x. Оно имеет действительное решение тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$D=4a^6-4(1+a^2)(a^4-4)\geq 0.$$

Упростив неравенство, получаем

$$a^4-4a^2-4\leq 0.$$

Учитывая, что уравнение $z^2-4z-4=0$ имеет два корня $z=2\pm 2\sqrt{2}$, получаем, что

$$a^4-4a^2-4=(a^2-2-2\sqrt{2})(a^2-2+2\sqrt{2})\leq 0.$$

Поскольку $a^2\geq 2-2\sqrt{2}$ при любых a, так как $2-2\sqrt{2}<0$, получаем неравенство

$$a^2-2-2\sqrt{2}\leq 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$|a|\leq\sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при $|a|\leq\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ существует точка пересечения окружности и прямой.

Критерии №3:

0-4 – Были предложены незавершенные идеи.

5-8 – Предложено решение, но оно не верно.

9-11 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве.

12-15 – Правильное решение при описках или несущественных ошибках.

Задание 4.

Найти, при каких комплексных значениях x сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n^a \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^{8n}}$, где a – наименьший положительный корень уравнения $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Ответ: При $|x| \neq 1$ всюду сходится, a=2.

Решение. Составим ряд из модулей вида $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Согласно признаку Д'Аламбера проверяем случай, когда найденное выражение $|z_{n+1}/z_n| < 1$ для всех достаточно больших n. Это справедливо при $|x| > 1$ и $|x| < 1$.

Проверяем случай $|x| = 1$. Ряд из модулей расходится, т.к. нарушен необходимый признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}/(1 + x^{8n})$.

Критерии №4:

0 – Ответ неверный или попытка решения практически отсутствует;

1 – Только $a = 2$ найдено верно;

2-4 – Решение проведено для действительного случая;

5 – Указан только один из интервалов $|x| > 1$ и $|x| < 1$;

6-10 – Найдены два интервала $|x| > 1$ и $|x| < 1$ сходимости (возможны мелкие ошибки в обосновании);

11-14 – Найдены два интервала $|x| > 1$ и $|x| < 1$ сходимости и предпринята попытка исследовать случай $|x| \neq 1$;

15 – Правильное решение.

Задание 5.

$17^{25}(10) = \ldots ?$

Ответ: 7.

Решение 1.

$17^1 \equiv 7 \; mod \; 10$

$17^2 \equiv 9 \; mod \; 10$

$17^3 \equiv 3 \; mod \; 10$

$17^4 \equiv 1 \; mod \; 10$

"Период" найден.

$17^5 \equiv 7 \; mod \; 10$

$\ldots$

$(17^4)^6 \equiv 1 \; mod \; 10$

$17^{25} \equiv 7 \; mod \; 10$

Решение 2.

$17^{25}(10) = 7^{25}(10)$.

$gcd(7, 10) = 1$ (gcd - наибольший общий делитель).

Из малой теоремы Ферма следует, что $7^{\varphi(10)} = 1(10)$, где $\varphi(x)$ – функция Эйлера числа взаимнопростых чисел, не превосходящих x.

$gcd(2,5) = 1$, $\varphi(10) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = (2-1) \cdot (5-1) = 4$

$$17^{25}(10) = 7^{25}(10) = 7^{25 mod 4}(10) = 7^1(10) = 7.$$

Критерии №5:

0-3 – Ответ неверный или попытка решения практически отсутствует.

4-8 – Предложено решение, но по причине ошибок в счете ответ неверный.

9-13 – Не ставилось.

14-15 – Правильное решение.

Задание 6.

Несколько раз подбрасывается игральная кость. Более вероятно, что выпадет четная или нечетная сумма очков?

Ответ: События равновероятны.

Решение 1.

Доказать по индукции.

E_n – сумма при n подбрасываниях четна.

O_n – сумма при n подбрасываниях нечетна.

e_n – n-е подбрасывание дало четное число.

o_n – n-е подбрасывание дало четное число.

База индукции:

$$P(E_1) = P(O_1) = \frac{3}{6} = 0.5;\ P(E_n) + P(O_n) = P(e_n) + P(o_n) = 1.$$

$$P(E_n) = P(E_{n-1}|e_n) * P(e_n) + P(O_{n-1}|o_n) * P(o_n).$$
$$P(O_n) = P(O_{n-1}|e_n) * P(e_n) + P(E_{n-1}|o_n) * P(o_n).$$

Остается применить предположение индукции.

Решение 2.

Как можно было заметить, важна лишь четность количества выпавших нечетных чисел. Рассматривая нечетность как успех, четность - как неудачу, мы приходим к схеме испытаний Бернулли с симметричной монетой - биномиальному распределению с параметром $1/2$.

После этого нужно было показать, что

$$2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k+1}$$

Последнее тождество доказывается путем раскрытия скобок в биноме Ньютона $(1-1)^n$ и переноса всех отрицательных слагаемых в правую часть.

Критерии №6:

0-4 – Были предложены незавершенные идеи.

5-8 – Предложено решение, но оно не верно или не объяснено.

9-11 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве.

12-15 – Правильное решение при описках или несущественных ошибках.

Решение в виде приведения дерева без доказательства с выкладками или примеров не засчитывалось. Симметричность биномиальных коэффициентов для второго решения работает только для нечетного n.

Задание 7.

Имеется n пронумерованных писем и n пронумерованных конвертов. Найти математическое ожидание числа совпадений, когда номер письма совпадает с номером на конверте. **Ответ:**

1. **Решение 1.** $\xi_i = \begin{cases} 1, & i - \text{е письмо совпало по номеру} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$P_i = P(\xi_i = 1) = \frac{1}{n}; \quad E\xi = E(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

Решение 2. Заметить биномиальное распределение с параметром $p = \frac{1}{n}$ у которого математическое ожидание $E\xi = np = 1$.

Решение 3.

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{D_{n,k}}{n!},$$

где $D_{n,k}$ – число перестановок из n элементов с k встречами.

При помощи математической индукции легко доказать следующие комбинаторные тождества:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{D_{n,k}}{n!} = 1 \tag{1}$$

$$D_{n,k} = \frac{n}{k} \cdot D_{n-1,k-1},\ k > 0 \tag{2}$$

Учитывая, что случай $k = 0$ не дает вклада в математическое ожидание и подставляя второе тождество в первое со сдвигом порядка суммирования мы приходим к тому, что

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \frac{D_{n-1,k-1}}{n!} = 1.$$

Критерии №7:

0-4 – Были предложены незавершенные идеи.

5-8 – Предложено решение, но оно не верно или не объяснено.

9-11 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве.

12-15 – Правильное решение при описках или несущественных ошибках.

Решение без введения слуайных веичин - индикаторов - или правильно посчитанных комбинаорных выкладок не засчитывалось.

Задание 8.

Предложить алгоритм определения того, что граф на n вершинах, заданный матрицей смежности, является двудольным.

Ответ: Правильная раскраска вершин графа в 2 цвета для всех компонент связности на основе поиска в ширину или составления двух множеств по цветам.

Решение.

Произведём серию поисков в ширину. Т.е. будем запускать поиск в ширину из каждой непосещённой вершины. Ту вершину, из которой мы начинаем идти, мы помещаем в первую долю. В процессе поиска в ширину, если мы идём в какую-то новую вершину, то мы помещаем её в долю, отличную от доли текущей вершину. Если же мы пытаемся пройти по ребру в вершину, которая уже посещена, то мы проверяем, чтобы эта вершина и текущая вершина находились в разных долях. В противном случае граф двудольным не является. Если остались непройденные вершины – повторяем алгоритм для других компонент связности, начиная с проивольной вершины.

По окончании работы алгоритма мы либо обнаружим, что граф не двудолен, либо найдём разбиение вершин графа на две доли.

Исходный код и текст выложен на сайте © http://e-maxx.ru/algo/

Критерии №8:

0-4 – Были предложены незавершенные идеи.

5-7 – Предложено решение, но оно не верно или не объяснено

8-12 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве. Нет реализации алгоритма (псевдокод, блок-схема), не описаны базовые структуры данных и операции, используемые в алгоритме. Не оптимальное решение (поиск в глубину через рекурсию, неоптимальный поиск в ширину, переборное решение или решение через отсутствие циклов нечетной длины).

13-15 – Правильное решение при описках или неточностях.

Решением к задаче не должно было быть “сочинение по русскому языку”; оптимальность решения по временной сложности и по памяти, а также понимание абитуриентом основ и способов написания алгоритмов оценивалось как основной профильный навык по программированию.

Задание 9.

Мышка прячется в одной из пяти норок, расположенных и пронумерованных в ряд слева направо цифрам от 1 до 5. Кот не может заглянуть в норку, но может проверить лапой одну из них. После этого испуганная мышка перебегает в соседнюю левую или крайнюю правую норку. Остаться в норке мышка не может. Предложить алгоритм, позволяющий коту (гарантированно) поймать мышку (за конечное число шагов).

Ответ: Выбрать норку номер 4 или 5. Проверять только выбранную норку на каждом шаге.

Решение.

Поскольку мышь в любой момент может убежать в 5-ю норку и ходить по циклам 5-4-5, 4-5-4, 5-4-3-5, то проверять нужно либо только 5-ю норку, либо 4-ю, поскольку из 5-й мышь обязательно попадет в 4-ю. В 5-ю норку мышь попадет не более чем за 4 хода.

Критерии №9:

0-4 – Были предложены незавершенные идеи.

5-10 – Предложено решение, но оно не верно или не объяснено

11-15 – Правильное решение при описках или неточностях.

В решении не должно быть слов "когда-нибудь "рано или поздно "поскольку норок конечное чило"и прочие неточности. Необходимо было указать точное количество ходов и обосновать алгоритм минимальным текстом или построением диаграммы состояний переходов.

Задача 10.

Determine values of real parameters $a \geqslant 0$ and $b \geqslant 0$ for which the following limit exists and equals to 0:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{1/x}+\cos(\pi+ax^5)-\ln(1+\operatorname{sh}bx)\right).$$

Ответ: $a=b=0$.

Решение. Заметим, что функции $2^{1/x}$ и $\cos(\pi+ax^5)$ ограничены в интервале $[1;+\infty)$, в то время как функция $\operatorname{sh}bx$ монотонно возрастает и неограничена сверху при любом $b>0$. Функция $\ln(x)$ монотонно возрастает и неограничена сверху при $x\to+\infty$. Значит равенство предела нулю возможно только при $b=0$. В этом случае $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\operatorname{sh}bx)=0$.
Заметим, что функция $\cos(\pi+ax^5)$ периодическая при всех $a\neq 0$ и не имеет предела при $x\to\infty$, в то время как $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{1/x}=1$. Значит, для

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{1/x}+\cos(\pi+ax^5)-\ln(1+\operatorname{sh}bx)\right)=0,$$

необходимо $a=0$. Несложно проверить, что при $a=b=0$ искомый предел равен 0.

Критерии №10:

0-4 – Верно найдены пределы 1-2 слагаемых суммы. 5-9 – Получен верный ответ, но не доказано, что ответ единственный. 10-15 – Приведено в целом верное решение, содержащее неточности или не полностью обоснованное доказательство.

Задача 11.

Compute the antiderivative $F_n(x)$ of the function $f_n(x)$ given by the recurrence relations $f_0(x)=3x^2-1$, $f_1(x)=4x$, $f_n(x)=5f_{n-1}(x)-6f_{n-2}(x)$, assuming $F_n(0)=0$.

Ответ: $F_n=2^n(3x^3-2x^2-3x)+3^n(-2x^3+2x^2+2x)$.

Решение. Общее решение однородного уравнения для f_n определяется решением характеристического уравнения

$$\lambda^2=5\lambda-6,$$

откуда $\lambda_{1,2}=\{2,3\}$ и $f_n=2^n(A_1x^2+A_2x+A_3)+3^n(B_1x^2+B_2x+B_3)$, где константы A_1-A_3 и B_1-B_3 определяются граничными условиями задачи. Откуда $B_3=2$, $A_3=-3$, $A_2=-4$, $B_2=4$, $A_1=9$ и $B_1=-6$. Откуда общее решение рекуррентности для f_n

$$f_n=2^n(9x^2-4x-3)+3^n(-6x^2+4x+2).$$

Первообразная $F_n(x)$;

$$F_n=2^n(3x^3-2x^2-3x)+3^n(-2x^3+2x^2+2x)+C.$$

Из условия $F_n(0)=0$ получаем $C=0$ и итоговое решение задачи в виде

$$F_n=2^n(3x^3-2x^2-3x)+3^n(-2x^3+2x^2+2x).$$

Критерии №11:

0-8 – Была попытка решения, не доведенная до конца.

9-15 – Верно решено рекуррентное соотношение, получен ответ (возможно с неточностями).

Задача 12.

Compute all real-valued solutions of the equation $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x} + 6x$.

Ответ: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}\cos 2x + c_3 e^{2x}\sin 2x - \frac{3}{8}(x+1) + \frac{1}{4}xe^{2x}$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные вещественные константы.

Решение. Характеристическое уравнение для однородного уравнения $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 0$ имеет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$. Следовательно общее вещественное решение y_0 однородного уравнения может быть записано в виде

$$y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}\cos 2x + c_3 e^{2x}\sin 2x,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные вещественные константы.

Частное решение уравнения $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x}$ будем искать в виде $\tilde{y} = Axe^{2x}$. Подстановкой найдем $\tilde{y} = \frac{1}{4}xe^{2x}$. Частное решение y^* уравнения $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 6x$ будем искать в виде $y^* = Ax + B$. Подстановкой найдем $y^* = -\frac{3}{8}(x+1)$.

Откуда получаем

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}\cos 2x + c_3 e^{2x}\sin 2x - \frac{3}{8}(x+1) + \frac{1}{4}xe^{2x},$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные вещественные константы.

Критерии №12:

0-5 – Верно записано и решено характеристическое уравнение (возможно с неточностями)

6-10 – Верно выписано общее решение неоднгородного уравнения (возможно с неточностями)

11-15 – Найдено частное решение системы (возможно с неточностями)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Темы олимпиадных заданий соответсвуют программе вступительных экзаменов по специальности, которую можно найти на сайте НИУ ВШЭ. Ниже — краткий список тем.

1. Линейная алгебра
2. Математический анализ
3. Дифференциальные уравнения
4. Теория вероятностей
5. Математическая статистика
6. Множества, функции, отношения
7. Математическая логика и теория алгоритмов
8. Теория графов

Литература

1. Ильин В.А. Линейная алгебра.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1-3.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Б.П. Демидовича.
6. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
7. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.
9. Крамер Г. Математические методы статистики.
10. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера.
12. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.
13. Оре О. Теория графов.