Направление: Математические методы анализа экономики
Профили:
«Прикладная экономика»
«Экономика: исследовательская программа»

1. **Calculate the limit**

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{8}-\sqrt{x-8}}{\sqrt{x^2-64}}$$

Решение. (Приводится только на русском языке).

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{8}-\sqrt{x-8}}{\sqrt{x^2-64}}=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt{x^2-64}}-\frac{\sqrt{x-8}}{\sqrt{x^2-64}}\right)=\lim_{x\to 8}\left(\frac{x-8}{\sqrt{x^2-64}\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}-\frac{1}{\sqrt{x+8}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}\sqrt{\frac{x-8}{x+8}}-\frac{1}{\sqrt{x+8}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{16}}=-\frac{1}{4}$$

Критерии

а) Все правильно – 10 баллов.
б) Арифметическая ошибка – 1 балл.
в) Если есть движение в правильном направлении (разложение числителя или знаменателя на множители) – 3 балла.
Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

2. **Matrix** $A=\begin{pmatrix} c & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(a) **Compute the value of constant c that minimizes the rank of matrix A.**
(b) **Using this c find the fundamental system of solutions of the system**
(c) **Find the general solution of the system, using the fundamental system of solutions**

Решение. (Приводится только на русском языке).

(a) Очевидно, что ранг матрицы не может быть меньше 2 и больше 3, поэтому минимальный ранг матрицы равен 2. Для этого нам нужна линейная зависимость каких-нибудь двух строк. Заметим, что:

$$A=\begin{pmatrix} c & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} c-4 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что 1 и 3 строка будут зависимы при $c = 1$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$

ФСР, к примеру: $e_1 = (2 \quad -4 \quad -3 \quad 0), e_2 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$.

(c) Общее решение: $\vec{x} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2}, \forall c_1, c_2$

Критерии

- *Нахождение константы – 4 балла*
- *ФСР – 4 балла*
- *Общее решение через ФСР – 2 балла*

3. Find the extremum of the following function: $F(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(-(x^2 + y^2))$

Решение. (Приводится только на русском языке).

Найдем точки, подозрительные на экстремум, решая следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\exp(-(x^2 + y^2)) + (x^2 + y^2)(-2x)\exp(-(x^2 + y^2)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\exp(-(x^2 + y^2)) + (x^2 + y^2)(-2y)\exp(-(x^2 + y^2)) = 0,$$

которую можно переписать в виде

$$x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$y(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Получим точки со следующими координатами: $(0,0); \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}.$.

Далее необходимо проверить выполнение условий второго порядка. Для этого найдем матрицу вторых производных исследуемой функции:

$$\begin{pmatrix} (2 - 10x^2 - 2y^2 + (4(x^2 + y^2))x^2)\exp(-x^2 - y^2) & (-8xy + (4(x^2 + y^2))xy)\exp(-x^2 - y^2) \\ (-8xy + (4(x^2 + y^2))xy)\exp(-x^2 - y^2) & (2 - 10y^2 - 2x^2 + (4(x^2 + y^2))y^2)\exp(-x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

.

Проверим знакоопределенность этой матрицы в каждой из найденных подозрительных точек.

Для точки с координатами имеем следующую матрицу: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица положительно определена, следовательно, точка с координатами $(0;0)$ является точкой минимума.

Для точек вида имеем следующую матрицу:

$\begin{pmatrix} -4x^2e^{-1} & -4xye^{-1} \\ -4xye^{-1} & -4y^2e^{-1} \end{pmatrix}$. Очевидно, $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0$. Следовательно, необходимо дополнительное исследование. Сделаем замену $t = x^2 + y^2$, тогда $F(x, y) = G(t) = te^{-t}$. $G''(1) = -e^{-1} < 0$, и в сколь угодно малой окрестности точки окружности есть точки такой же окружности, на которых функция принимает то же значение, поэтому точки вида $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ являются точками нестрогого максимума.

Критерии

- *Составление системы уравнений: 1 балл.*
- *Нахождение точек, подозрительных на экстремум: 2 балла.*
- *Составление матрицы вторых производных: 1 балл.*
- *Правильная классификация первой точки: 2 балла.*
- *Правильная классификация второго семейства точек: 4 балла.*

4. Specify points in the triangle $D = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$, where the function given by the formula $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + c$; $a > 0, b > 0$ can take maximum and minimum values at different values of the parameters.

Решение. (Приводится только на русском языке).

Условие задачи требует только указать точки, в которых может наблюдаться максимум и минимум при различных значениях параметров. Анализ зависимости расположения максимума и минимума от значений параметров проводить не требуется.

Поскольку область, в которой необходимо проанализировать расположение экстремумов функции, является замкнутой (включает в себя границы), необходимо проанализировать наличие точек экстремума внутри области и на ее границе.

1. Анализ наличия точек экстремума внутри области D (открытое множество).

Найдем критические точки функции $f(x, y)$ и проверим их принадлежность внутренней части области D.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y - b) = 0 \end{cases}, \text{матрица Гессе } G = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

Таким образом, в точке $\{x = a, y = b\}$ функция $f(x, y)$ имеет минимум $f(a, b) = c$. Точка принадлежит внутренней части области D, если $a, b \geq 0$ и $a + b \leq 1$. В этом случае, из свойств функции $f(x, y)$, которая является эллиптическим параболоидом, следует, что в этой точке достигается ее глобальный минимум. Если же точка $\{x = a, y = b\}$ не принадлежит внутренней части треугольника D, минимум достигается на его границе.

2. Анализ наличия экстремумов на границе области.

Необходимо проанализировать наличие условных экстремумов на трех участках границы области D: $A = \{x = 0, y \in [0,1]\}, B = \{y = 0, x \in [0,1]\}, C = \{y + x = 1, x \in [0,1]\}$.

2.1.Анализ на участке А

Проанализируем наличие экстремума на интервале $y \in (0,1)$ при $x = 0$. В этом случае нет необходимости использовать функцию Лагранжа. Достаточно подставить условие $x = 0$ в выражение для функции $f(x, y)$ и проанализировать наличие экстремума у функции $f(0, y) = (y - b)^2 + a^2 + c$. Используя рассуждения аналогичные пункту 1, получаем, что у функции имеется минимум в точке $y = b, f_1 = f(0, b) = c + a^2$. Если $b \in (0,1)$, то минимум принадлежит участку границы А и из свойств квадратичной функции является глобальным минимумом. В противном случае минимум достигается в точке (0,0) или (0,1). В этих точках функция принимает значения $f_2 = f(0,0) = c + a^2 + b^2, f_3 = f(0,1) = a^2 + (1 - b)^2 + c = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b$. Очевидно, что $f_3 > f_2$, если $b < 0.5$, и $f_3 < f_2$ если $b > 0.5$.

Таким образом, возможны варианты:

a) $b \in [0,0.5), f_{min,A} = f(0, b) = c + a^2,\ f_{max,A} = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b$.
b) $b = 0.5, f_{min,A} = f(0,0.5) = c + a^2,\ f_{max,A} = f(0,0) = f(0,1) = c + a^2 + 0.25$.
c) $b \in (0.5,1], f_{min,A} = f(0, b) = c + a^2,\ f_{max,A} = f(0,0) = c + a^2 + b^2$.
d) $b > 1, f_{min,A} = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b,\ f_{max,A} = f(0,0) = c + a^2 + b^2$.

2.2.Анализ на участке В

Рассуждения полностью аналогичны пункту 2.1. Возможны варианты:

e) $a \in [0,0.5), f_{min,B} = f(a, 0) = c + b^2,\ f_{max,B} = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2a$.
f) $a = 0.5, f_{min,B} = f(0.5,0) = c + b^2,\ f_{max,B} = f(0,0) = f(1,0) = c + b^2 + 0.25$.
g) $a \in (0.5,1], f_{min,B} = f(a, 0) = c + b^2,\ f_{max,B} = f(0,0) = c + a^2 + b^2$.
h) $a > 1, f_{min,B} = f(1,0) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2a,\ f_{max,B} = f(0,0) = c + a^2 + b^2$.

2.3.Анализ на участке С

Аналогично пунктам 2.1 – 2.2, подставим в выражение для функции $f(x, y)$ условие $y = 1 - x$. Тогда, $g(x) = f(x, 1 - x) = (x - a)^2 + (1 - x - b)^2 + c$. Это вновь квадратичная функция, которая имеет единственный глобальный экстремум. Минимум достигается в точке $x_c = \frac{a-b+1}{2}$. Если $x_c \in [0,1]$, т.е. $a \geq 0$ и $max(0, a - 1) \leq b \leq 1 + a$, то минимум принадлежит участку границы С и равен $f_1 = \frac{(1-a-b)^2}{2} + c$. В противном случае минимум достигается в точке (1,0) или (0,1). В этих точках функция принимает значения $f_2 = f(1,0) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2a, f_3 = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b$. При этом $f_2 \geq f_3$, если $a \leq b$ и наоборот.

Возможны варианты:

a) если $a \geq 0$ и $a \leq b \leq 1 + a$, тогда $x_c = \frac{a-b+1}{2}$, $y_c = \frac{b-a+1}{2}$ и $f_{min,C} = \frac{(1-a-b)^2}{2} + c, f_{max,C} = f(1,0) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2a$.
b) если $a \geq 0$ и $max(0, a - 1) \leq b < a$, тогда $x_c = \frac{a-b+1}{2}$, $y_c = \frac{b-a+1}{2}$ и $f_{min,C} = \frac{(1-a-b)^2}{2} + c, f_{max,C} = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b$.
c) если $a \geq 0$ и $b > 1 + a$, то $f_{min,C} = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b$ и $f_{max,C} = f(1,0) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2a$
d) если $a \geq 1$ и $b < a - 1$, то $f_{min,C} = f(1,0) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2a$ и $f_{max,C} = f(0,1) = c + a^2 + b^2 + 1 - 2b$

Критерии.
Всего потенциальных точек максимума и минимума — семь.
Обоснованное описание одной точки от 1.5 до 2 баллов в зависимости от качества описания.

5. **Solve the differential equation** $y'' - 2y' + y = 6\,x\,e^{x} + 10$

Решение и критерии. (Приводится только на русском языке).

Характеристическое уравнение (2 балла): $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
Корни (2 балла): $\lambda = 1$ кратности 2.
Общее решение однородного уравнения (2 балла): $y(x) = e^{x}(C_1 x + C_2)$
Подбор частного решения вида $x^2(K_1 x + K_2)e^{x}$ (3 балла)
Подбор частного решения вида K_3 (1 балл)
Ответ: $y(x) = e^{x}(C_1 x + C_2) + x^3 e^{x} + 10$

6. **Magician has four boxes with balls. There are 30 balls with different colors in each box. There are 15 red balls, 5 blue balls and 10 green balls in the first box; 30 red balls in the second box; 10 red balls and 20 green balls in the third box; 20 red balls and 10 blue balls in the fourth box. During the show the magician chose one box and pulled away the randomly chosen ball. The ball was red. Then this ball was returned to its box and the magician again pulled the randomly chosen ball from the same box. And this ball was red too. Calculate the probability, that both balls were pulled away from the first box.**

Решение. (Приводится только на русском языке).

Пусть событие А – в обоих испытаниях были извлечены красные шары. Событие B_1 заключается в том, что оба шара были извлечены из первого ящика, событие B_2 заключается в том, что оба шара были извлечены из второго ящика, событие B_3 заключается, что оба шара были извлечены из третьего ящика, событие B_4 заключается, что оба шара были извлечены из четвертого ящика.

Поскольку все шары извлекались наудачу, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$.

Соответственно, $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_2) = 1\cdot 1 = 1$, $P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $P(\mathrm{A} \mid B_4) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Для поиска искомой вероятности используем формулу Байеса:

$$P(B_1 | \mathrm{A}) = \frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)+P(B_4)\cdot P(A|B_4)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{16}}{0.0625+0.25+0.0277+0.1111} = \frac{0.0625}{0.451} = 0.1386$$

Решение с **типичной** ошибкой.

С- в одном испытании был извлечен красный шар.

Искомая вероятность ищется как:

$$(P(B_1 | \mathrm{C}))^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(0.2\right)^2 = 0.04$$

Ответ неверен, потому что предполагается, что оба исхода независимы, но не так, так как в обоих случаях шар достается из одного и того же ящика.

Критерии
За полностью решеную задачу ставиться 10 баллов. За корректное определение событий и их использование ставится – 4 балла. За правильный расчет необходимых условных вероятностей - 3 баллов. За окончательный расчет искомой вероятности – 3 балла. За арифметическую ошибку снимается 1 балл. За корректный расчет вероятности только для одного шара - 2 балла, вероятность для одного шара, возведенная в квадрат – 3 балла.
Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

7. Reduce the quadratic form

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 x_2 + 2x_3 x_4}$$

To canonical form by orthogonal transformation

(Both the canonical form itself and the orthogonal transformation that reduces the form to canonical form are required)

<u>Решение. (Приводится только на русском языке).</u>

Запишем матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы А

$$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 = 0$$

Отсюда получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.
Следовательно, канонический вид квадратичной формы имеет вид:
$f(y) = f(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.
Остается найти ортогональное преобразование, которое приводит форму к каноническому виду. Для этого требуется найти ортонормированный базис из собственных векторов матрицы.
Собственные векторы матрицы А, отвечающие $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, находим из системы: $\left(A - \lambda_1 I\right) x = 0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Поскольку ранг данной системы r равен 2, а n=4, решая систему, находим пару линейно независимых собственных векторов. Например, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что они ортогональны. Пронормируем их: $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

g_1 и g_2 -- ортонормированные собственные векторы матрицы А, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
Аналогично, найдем ортонормированные собственные векторы матрицы А, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Решая систему, находим пару линейно независимых собственных векторов. Например,

$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что они ортогональны. Пронормируем их:

$g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Составим матрицу ортонормированных собственных векторов

$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Тогда искомое ортогональное преобразование имеет вид

$x = Gy$ или $y = G^T x$

Таким образом,

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 + x_4)$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1)$$

$$y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_4 - x_3)$$

Данное преобразование приводит квадратичную форму $f(x) = 2x_1 x_2 + 2x_3 x_4$ к каноническому виду: $f(y) = f(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

Замечание.
Квадратичную форму к каноническому виду можно было привести и с помощью метода Лагранжа.
Заметим, что

$$f(x) = 2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_2 + x_4)^2 \quad - (x_2 + x_3)^2 + x_2^2$$

Отметим, что по закону инерции данный вид также имеет два положительных и два отрицательных коэффициента.

Критерии

- *3 балла за получение собственных значений и запись канонического вида;*
- *4 балла за получение набора ортонормированных собственных векторов;*
- *3 балла за верно выписанное ортогональное преобразование.*
- *ЗАМЕЧАНИЕ: каноническая форма определена однозначно (с точностью до переобозначения переменных). Ортогональное преобразование определено неоднозначно. Правильность можно проверить следующим образом: составить векторы из коэффициентов в преобразовании и убедиться, что они являются собственными векторами матрицы квадратичной формы и являются ортонормированным базисом.*

8. Calculate the derivative of the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ given by the formula $f(x)=\arcsin\left(\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)$. Is it true that the derivative of $f(x)$ is a continuous function? Determine the type of break points, if the derivative of $f(x)$ isn't a continuous function.

Решение. (Приводится только на русском языке).
Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$f'(x)=-2sign(x)\frac{|a|}{a^2+x^2}$$

Данная производная непрерывна в любой точке кроме точки x=0, так как

$$f'_+(0)=-\frac{2}{|a|}$$

$$f'_-(0)=\frac{2}{|a|}$$

Точка x=0 является точкой разрыва 1-го рода, но не является устранимым разрывом, так как левый и правый пределы конечны, но не равны друг другу.

Критерии

1. *Правильное нахождение производной – 4 балла*
2. *Обоснованное определение точки разрыва – x=0 – 4 балла*
3. *Определение типа разрыва – 2 балла.*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

9. For modeling of a hit accuracy of gun Rayleigh distribution is used. The density function of Rayleigh distribution is following:

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}),\ \text{x} \geq 0, \sigma > 0$$

Tasks:

1) **Show, how parameter σ^2 determines the shape of the distribution function (Hint: derive the distribution function of Rayleigh distribution and show the dependence). Give an explanation.**
2) **Estimate parameter $b = 2\sigma^2 + 1$ using maximum likelihood approach. You have sample with 100 iid observations and $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 450$.**
3) **Build a 99% confidence interval for $b = 2\sigma^2 + 1$. Give a brief explanation.**

Решение. (Приводится только на русском языке).

Запишем функцию распределения: $F_X(x) = \int_0^x f_X(\text{z})dz = \int_0^x \frac{z}{\sigma^2} \cdot \exp(-\frac{z^2}{2\sigma^2})dz.$

Сделаем замену переменных: $\frac{z}{\sigma^2}$ =a.

$$F_X(x) = \int_0^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \exp(-\text{a})d\,\text{a} = -\exp(-a)\,|_0^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\left(\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) - 1\right) = 1 - \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}).$$

Рост параметра σ^2 приводит к уменьшению значения функции распределения случайной величины. Таким образом, параметр σ^2 отвечает за сжатие/растяжения функции распределения вдоль горизонтальной оси.

1) Запишем логарифм функции плотности: $\ln f_X(x) = \ln x - \ln \sigma^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2}$.

Функция максимального правдоподобия будет выглядеть следующим образом:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \left(\ln x_i - \ln \hat{\sigma}^2 - \frac{x_i^2}{2\hat{\sigma}^2} \right) = \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \cdot \ln \hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\hat{\sigma}^2}.$$

Для простоты обозначим $\hat{\sigma}^2$ как a.

Возьмем первую производную:

$$\ln L'_a = -n \cdot a^{-1} + a^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2} = 0$$

Так как $a \neq 0$, то мы можем домножить выражение на a^2:

$$-n \cdot a + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2} = 0$$

$$a^* = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{200} \cdot 450 = 2.25$$

Проверим условие второго порядка:

$$\ln L''_{aa} = n \cdot a^{-2} - 2a^{-3}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2} = \frac{na - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{a^3}$$

$\dfrac{na^* - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{a^{*3}} < 0$, так как $a^* = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. То есть достаточное условие максимума выполнено.

Искомое значение параметра b будет равно: $2 \cdot 2.25 + 1 = 5.5$

2) Доверительный интервал будет задаваться следующим образом:

$[\hat{b} - z_{crit}\sqrt{Var(\hat{b})}; \hat{b} + z_{crit}\sqrt{Var(\hat{b})}]$

Необходимо определить дисперсию оценки параметра b:

$Var(\hat{b}) = 4 \cdot Var(\hat{\sigma}^2)$

$$Var(\hat{\sigma}^2) = \left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\hat{\sigma}^2)^2}\bigg|_{\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^{2*}}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^3}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{2}\cdot 450}{2.25^3}\right)^{-1} = \left(\frac{225}{11.39}\right)^{-1} = 0.0506$$

$z_{crit} = 2.575$ легко получить из таблицы критических значений для стандартного нормального распределения (применяется нормальное распределение, так как оценки полученные методом максимального правдоподобия имеют асимптотически нормальное распределение, а 100 наблюдений достаточно для асимптотики).

Значит доверительный интервал будет выглядеть следующим образом:

$[5.5 - 2.575\sqrt{0.2024}; 5.5 + 2.575\sqrt{0.2024}]$

$[5.5 - 1.158; 5.5 + 1.158]$

$[4.342; 6.658]$

Критерии

1. *За первый пункт ставится 3 балла. За взятие интеграла – 2 балла. Неправильные пределы интегрирования – штраф 2 балла. За объяснение влияния параметра на форму распределения – 1 балл. Если объяснено корректно как параметр влияет на функцию плотности, то ставится 1 балл. За арифметическую ошибку – штраф 1 балл.*
2. *За второй пункт ставится 4 балла. За выписывание функции правдоподобия – 1 балл. За расчет параметра b – 2 балла. За проверку условий второго порядка – 1 балл. За арифметическую ошибку – штраф 1 балл.*
3. *За третий пункт ставится 3 балла. За правильный расчет дисперсии – 2 балла. За расчет дисперсии только для σ^2 - штраф 1 балл. За умение пользоваться таблицей критических значений -1 балл. За арифметическую ошибку – штраф 1 балл.*

Решение в любой не обозначенной выше ситуации остается на усмотрение проверяющего.

10. Let a_t be the advertising cost, p_t — the price of good and q_t — the sales volume at time 't'. Data analysis shows that they are related by equation $q_t = 100 + 20a_t - 60p_t + v_t$ (numbers are LS estimates of the coefficients). All estimates are significant with p-level 95%. The distribution of the random component is normal. Covariance matrix of the estimated coefficients in front of a_t and p_t is $C = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. What should be the magnitude of advertising cost in order to fully offset the negative impact of price on the sales volume and increase it with probability of error 0.05 if price is ten rubles?

Решение. (Приводится только на русском языке).

Решение задачи сводится к проверке гипотезы о линейной комбинации коэффициентов линейной регрессии. Для успешного решения задачи требуется выписать уравнение, решение которого обеспечивает нахождение искомого значения. Поскольку в условии требуется найти величину расходов на рекламу, которая не только компенсирует негативное влияние цен на объемы продаж, но и позволит их увеличить, искомое значение получается в ходе проверки пары гипотез:

$$\begin{cases} H_0: d_a a_t + d_p p_t = 0 \\ H_1: d_a a_t + d_p p_t > 0' \end{cases} \qquad (1)$$

где d_a и d_p – коэффициенты линейной регрессии, величина $p_t = 10$ руб., а величину a_t требуется найти.

По условию задачи необходимо найти такую величину a_t, при которой отвергается основная гипотеза. Поскольку предполагается, что случайная составляющая в модели линейной регрессии имеет нормальное распределение, то условию задачи удовлетворяют расходы на рекламу, при которых выполняется неравенство:

$$t = \frac{\widehat{d_a} a_t + \widehat{d_p} p_t}{\sqrt{D[\widehat{d_a} a_t + \widehat{d_p} p_t]}} > u_{0.95} \approx 1.96 - 95\% \text{ квантиль нормального распределения.}$$

МНК оценки параметров регрессии даны в условии. Таким образом, искомое неравенство имеет вид:

$$20a - 600 > 1.96\sqrt{10a^2 - 20 * a + 200} \qquad (2)$$

Дискриминант квадратного трехчлена под знаком квадратного корня меньше нуля, коэффициент при старшей степени больше нуля, поэтому под знаком квадратного корня всегда стоит положительное выражение. Выражение в левой части неравенства больше нуля при $a > 30$. Возводя при этом условии левую и правую часть в квадрат, получим неравенство:

$$361.584a^2 - 23923.168a + 359231.68 > 0 \qquad (3)$$

Квадратный трехчлен в левой части неравенства имеет два действительных отрицательных корня. Поэтому, данное неравенство выполняется всегда при $a > 30$.

Таким образом, при условии $a > 30$ можно обеспечить рост объемов продаж с вероятностью ошибки 5%.

Критерии.
Корректная формализация задачи (система гипотез 1) – два балла
Выписывание неравенства (2) – плюс три балла
Правильное решение данного неравенства – плюс пять баллов
Точная оценка зависит от качества выполнения данных этапов.