**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2016 г.**
**Демонстрационный вариант**
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Время выполнения задания — 240 мин. Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов.**

**Time to complete the task is 240 min. Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, the maximal sum is 100 points.**

***Следующие шесть задач являются обязательными для решения. Условия первых трех из них даны только по-английски, чтобы проверить ваше знание этого языка.***

***The following six problems are mandatory to solve. The first three of them are formulated in English only in order to test your knowledge of this language.***

1. Determine the values of real parameters $a \geqslant 0$ and $b \geqslant 0$ for which the following limit exists and equals 0:

$$\lim_{x \to +\infty} \Big( 2^{1/x} + \cos(\pi + ax^5) - \ln(1 + \operatorname{sh} bx) \Big).$$

2. Compute the antiderivative $F_n(x) = \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$ of the function $f_n(x)$ given by the following recurrence relations. Take $F_n(0) = 0$:

$$f_0(x) = 3x^2 - 1, \quad f_1(x) = 4x, \quad f_n(x) = 5f_{n-1}(x) - 6f_{n-2}(x).$$

3. Solve the system of differential equations:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \ x(1) = 0, \\ \dot{y} = y - x, \ y(1) = 0. \end{cases}$$

4. Для системы функций $\mathfrak{A} = \{1, x \vee y, x \wedge y, x \to y\}$

- выясните, полна ли система функций $\mathfrak{A}$;
- постройте совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы для каждой функции из системы $\mathfrak{A}$.

4. For the function system $\mathfrak{A} = \{1, x \vee y, x \wedge y, x \to y\}$

- tell if the system $\mathfrak{A}$ is complete;
- construct the full disjunctive and conjunctive normal forms for each function from a system $\mathfrak{A}$.

5. Несколько раз подбрасывается игральная кость. Более вероятно, что выпадет четная или нечетная сумма очков?

5. A symmetric dice is tossed several times. What is more probable: the sum of all points is even or odd?

6. Докажите, что среди шестерых человек всегда найдутся трое, которые либо все знают друг друга, либо ни один из них не знает двух других.

6. Prove that among any six people there will always be three who either all know each other, or neither of them knows the other two.

***Среди следующих задач решите не менее четырех. В зачет вам пойдут не более четырех задач (если их будет решено больше, то четыре лучших решения).***

***Solve at least four of the following problems. Up to four solutions will be graded (if you solve more than four problems, only the best four solutions will be graded).***

7. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения

7. Find all real solutions of the differential equation

$$y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x} + 6x.$$

**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2016 г.**
**Демонстрационный вариант**
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

8. Из совокупности всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ с равномерным распределением вероятности случайно и независимо выбираются два подмножества $A$ и $B$. Найдите вероятность, что $A$ и $B$ не пересекаются.

9. Случайная величина $\xi$ принимает только натуральные значения с вероятностями $P(\xi = k) = c/(k(k+1))$. Найдите неизвестную константу $c$ и математическое ожидание случайной величины $\xi$.

10. На плоскости задана декартова система с координатами $x$, $y$. При каких значениях вещественного параметра $a$ окружность $x^2 + y^2 = 4$ имеет хотя бы одно пересечение с прямой $ax + y = a^2$?

11. Найдите $\sigma^{2015}$, где $\sigma$ задана формулой

12. Пусть $V$ и $W$ — двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$. Какие значения может принимать размерность подпространства $W \cap V$?

13. Покажите, что если в $n$-вершинном графе без петель и кратных ребер нет циклов нечетной длины и число ребер больше $(\frac{n-1}{2})^2$, $n \geqslant 2$, то граф связен.

14. Дано $2N$ точек на плоскости, координаты которых хранятся в массивах $X$ и $Y$. Напишите алгоритм, эффективно вычисляющий уравнение прямой, относительно которой в каждой открытой полуплоскости будет лежать ровно $N$ из заданных точек.

8. From the collection of all subsets of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$, two subsets $A$ and $B$ are selected independently and randomly with uniform probability distribution. Find the probability that $A$ and $B$ are disjoint.

9. The random variable $\xi$ takes only non-negative integer values with probabilities $P(\xi = k) = c/(k(k+1))$. Find the unknown constant $c$ and the mean value of the random variable $\xi$.

10. A Cartesian system with coordinates $x$, $y$ is given in the plane. For which values of the real parameter $a$ does the circle $x^2+y^2 = 4$ have at least one intersection with the line $ax + y = a^2$?

11. Find $\sigma^{2015}$, where the permutation $\sigma$ is given by

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 9 & 10 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Let $V$ and $W$ be two-dimensional subspaces in $\mathbb{R}^4$. Find the possbile values of the dimension of the subspace $V \cap W$.

13. Prove that if a graph with $n$ vertices without loops and multiple edges has no cycles of odd length and the number of edges greater than $(\frac{n-1}{2})^2$, $n \geqslant 2$, then the graph is connected.

14. We have $2N$ points lying in the plane, whose coordinates are stored in arrays $X$ and $Y$. Write an algorithm that efficiently calculates the equation of the line that divides the whole plane by two open half-planes each containing exactly $N$ given points.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

Эта страница оставлена пустой намеренно. This page intentionally left blank.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

### Предварительные критерии оценивания

0-2 – Абитуриентом предложены идеи **решения** задачи. Приведено решение без объяснений, выкладок или доказательств.

3-5 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено.

6-7 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве. Нет реализации алгоритма, не разобраны все случаи или часть из них не доказана или разобрана с ошибками. Не оптимальное решение.

8-10 – Правильное решение при допущенных описках или неточностях. Апелляция оценок 8 и 9 не рассматривается.

Уточненные критерии проверки по каждой задаче публикуются одновременно с началом периода подачи апелляций.

Решением к задаче не должно было быть «сочинение по русскому языку».

В решении должны присутствовать ссылки на теоретические факты из программы с указанием точных формулировок теорем, которые применяются. Если утверждение, на которое ссылается абитуриент, не содержится в программе вступительных испытаний, то его неогбходимо доказать в работе.

Все выкладки долждны быть равносильными преобразованиями; каждый случай оформлен отдельно.

Номер задания должен четко выделяться на фоне остального текста.

При обнаружении двух незачеркнутых решений одной и той же задачи на чистовике и черновике проверяются оба решения и выставляется минимальный балл. При написанном решении на черновике, на чистовие должен быть написан правильный ответ и ссылка на черновик.

### Перечень и содержание тем олимпиадных состязаний

1. **Линейная алгебра**
   - (a) Векторы, матрицы и действия с ними. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение.
   - (b) Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по строке и по столбцу.
   - (c) Транспонированная матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Специальные виды матриц.
   - (d) Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.
   - (e) Собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные и инвариантные подпространства.
   - (f) Характеристический многочлен. Аннулирующий и минимальный многочлены. Теорема Гамильтона-Кэли.
   - (g) Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Индексы инерции квадратичных форм.
2. **Математический анализ**
   - (a) Множества. Операции над множествами. Числовые множества. Грани множеств. Множества в $\mathbb{R}^n$. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.
   - (b) Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы.

(c) Функции одной переменной. Производные. Исследование и построение графика функции.

(d) Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе. Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных. Задача на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Условия дополняющей нежесткости.

(e) Понятие о квадратичных формах. Выпуклые функции и множества. Оптимизация при наличии ограничений. Функция Лагранжа и ее стационарные точки. Метод множителей Лагранжа.

(f) Неопределенный интеграл и его исчисление. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы и их исчисление.

(g) Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена.

3. **Дифференциальные уравнения**

(a) Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие решения. Поле направлений. Изоклины. Интегральные кривые. Задачи Коши.

(b) Уравнения в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати.

(c) Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации постоянной. Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка.

(d) Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения по Ляпунову.

(e) Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.

(f) Системы линейных дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовый портрет. Понятие устойчивости решений динамической системы. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

4. **Комбинаторика**

(a) Основные правила комбинаторики. Правило подсчета количества комбинаторных объектов. Принцип Дирихле. Примеры.

(b) Множества. Круги Эйлера, операции на множествах. Формула включений и исключений. Примеры.

(c) Сочетания. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Сочетания с повторениями.

5. **Теория вероятностей и математическая статистика**

(a) Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и случайные величины. Функция плотности распределения. Совместное распределение нескольких случайных величин. Условные распределения.

(b) Характеристики распределений случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, ковариация). Свойства математического ожидания и дисперсии. Условное математическое ожидание. Распределение дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, распределение Пуассона).

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

(c) Нормальное распределение и связанные с ним $\chi^2$-распределение, основные свойства.

(d) Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочные характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции).

(e) Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.

(f) Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень доверия и проверка значимости.

6. **Дискретная математика**

(a) Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, транзитивность, симметричность). Отношение эквивалентности. Отношение порядка.

(b) Графы. Изоморфизм графов. Подграфы, цепи, циклы. Связность графов. Компоненты связности. Планарные графы. Критерии планарности. Деревья. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Свойства деревьев. Нахождение кратчайшего пути в графе. Эйлеровы и Гамильтоновы цепи и циклы.

(c) Понятия алгоритма и сложности алгоритма. Простые структуры данных: массив, список, очередь, стек, дек. Последовательный и бинарный поиск. Алгоритмы сортировки одномерного массива и оценка сложности. Представление графов в виде матрицы смежности и матрицы инцидентности, алгоритмы на графах.

## Список рекомендуемой литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Учеб. Для вузов 4-е изд. М. Наука. Физматлит, 1999 – 296 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов, 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 648 с.
3. Бесов О.В. Курс лекций по математическому анализу. Учебное пособие. Ч 1,2. М.: МФТИ. 216 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2. Учеб. пособие для вузов: в 2-х т. - М.: Высш. шк., 1970.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1-3. 8-е издание. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 680 с., 864 с., 728 с.
6. Демидович Б.П.(редактор). Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов Издание шестое, стереотипное. - М.: Наука, 1968. - 472 с. - илл.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука,1974. - 331с. Изд. 4-е.
8. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям М.: Интеграл-Пресс, 1998 г. - 208 стр.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 8-е изд., испр. и доп. Учебник. М.: «Едиториал УРСС», 2005. - 448 с.
10. Крамер Г. Математические методы статистики М.: Мир, 1975. - 648 с.
11. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: ГУ ВШЭ, 2005. - 252, [1] с.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**


12. Шень А. Программирование: теоремы и задачи. Издательство МЦМНО, 2014.
13. Алексеев В., Таланов, В. Графы и алгоритмы. М.: Издательство Бином. Лаборатория знаний, 2009.
14. Макаров И.А., Токмакова Л.Р. УМК "Дискретная математика". Издательский дом НИУ ВШЭ, 2014. – 152 с.
15. Боровков А. А. Теория вероятностей. Учебное пособие для вузов — второе издание (переработанное и дополненное), — Москва: «Наука», 1986.
16. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Учебное пособие для вузов — второе издание (переработанное и дополненное), - Москва: «Наука», 1986. - 384 с.
17. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. Учебное пособие. — 2 изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 368 с
18. Боровков А.А. Математическая статистика. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007.
19. Ивченко, Г. И., Медведев, Ю. И. Введение в математическую статистику. М.: Издательство ЛКИ. 2010
20. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. МЦНМО: 2000. 960 с.
21. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука, 1996. — 304 с.

**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2016 г.**
**Демонстрационный вариант**
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Задача 1.**
*Определите значения параметров $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ для который следующий предел существует и равен 0:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{1/x}+\cos(\pi+ax^5)-\ln(1+\operatorname{sh}bx)\right).$$

**Ответ:** $a=b=0$.

**Решение.** Заметим, что функции $2^{1/x}$ и $\cos(\pi+ax^5)$ ограничены в интервале $[1;+\infty)$, в то время как функция $\operatorname{sh}bx$ монотонно возрастает и неограничена сверху при любом $b>0$. Функция $\ln(x)$ монотонно возрастает и неограничена сверху при $x\to+\infty$. Значит равенство предела нулю возможно только при $b=0$. В этом случае $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\operatorname{sh}bx)=0$.
Заметим, что функция $\cos(\pi+ax^5)$ периодическая при всех $a\neq 0$ и не имеет предела при $x\to\infty$, в то время как $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{1/x}=1$. Значит, для

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^{1/x}+\cos(\pi+ax^5)-\ln(1+\operatorname{sh}bx)\right)=0,$$

необходимо $a=0$. Несложно проверить, что при $a=b=0$ искомый предел равен 0.

**Критерии №1:**
0-3 – Верно найдены пределы 1-2 слагаемых суммы.
4-6 – Получен верный ответ, но не доказано, что ответ единственный.
7-10 – Приведено в целом верное решение, содержащее неточности или не полностью обоснованное доказательство.

**Задача 2.**
*Вычислите первообразную $F_n(x)$ решения $f_n(x)$ функционального рекуррентного соотношения*

$$f_0(x)=3x^2-1,\ f_1(x)=4x,\ f_n(x)=5f_{n-1}(x)-6f_{n-2}(x).\ F_n(0)=0.$$

**Ответ:** $F_n=2^n(3x^3-2x^2-3x)+3^n(-2x^3+2x^2+2x)$.

**Решение.** Общее решение однородного уравнения для $f_n$ определяется решением характеристического уравнения

$$\lambda^2=5\lambda-6,$$

откуда $\lambda_{1,2}=\{2,3\}$ и $f_n=2^n(A_1x^2+A_2x+A_3)+3^n(B_1x^2+B_2x+B_3)$, где константы $A_1-A_3$ и $B_1-B_3$ определяются граничными условиями задачи. Откуда $B_3=2$, $A_3=-3$, $A_2=-4$, $B_2=4$, $A_1=9$ и $B_1=-6$. Откуда общее решение рекуррентности для $f_n$

$$f_n=2^n(9x^2-4x-3)+3^n(-6x^2+4x+2).$$

Первообразная $F_n(x)$;

$$F_n=2^n(3x^3-2x^2-3x)+3^n(-2x^3+2x^2+2x)+C.$$

Из условия $F_n(0)=0$ получаем $C=0$ и итоговое решение задачи в виде

$$F_n=2^n(3x^3-2x^2-3x)+3^n(-2x^3+2x^2+2x).$$

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Критерии №2:**
0-5 – Была попытка решения, не доведенная до конца.
6-10 – Верно решено рекуррентное соотношение, получен ответ (возможно с неточностями).

**Задание 3.**
*Решите систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

*при начальном условии* $x(1) = 0$, $y(1) = 0$.

**Ответ:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t-1} \begin{pmatrix} \sin 1 \cos t - \cos 1 \sin t \\ -\sin 1 \sin t - \cos 1 \cos t \end{pmatrix} = e^{t-1} \begin{pmatrix} \sin(1-t) \\ -\cos(1-t) \end{pmatrix}$$

**Решение.** Следствием системы уравнений является равенство

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{y} = \dot{x} + y - x = 2\dot{x} - 2x.$$

Характеристическое уравнение для $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Корни уравнения $\lambda = 1 \pm i$.

Следовательно вещественное решение в общем виде может быть записано как

$$x(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t$$

$$y(t) = -C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t$$

Константы $C_1$ и $C_2$ определяются равенством

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}$$

Разрешив последнюю систему уравнений относительно $C_1$ и $C_2$ получаем $C_1 = e^{-1}\sin 1$ и $C_2 = e^{-1}\cos 1$.

Таким образом решение исходного уравнения имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t-1} \begin{pmatrix} \sin 1 \cos t - \cos 1 \sin t \\ -\sin 1 \sin t - \cos 1 \cos t \end{pmatrix} = e^{t-1} \begin{pmatrix} \sin(1-t) \\ -\cos(1-t) \end{pmatrix}$$

**Критерии №3:**
1 – Осмысленная попытка решения.
2-3 – Система сведена к уравнению второго порядка, которое решено в вещественной или комплексной форме.
2-6 – Получено решение системы в общем виде в вещественной форме.
5-8 – Получено решение, найдены константы $C_1$ и $C_2$, но ответ не является вещественной функцией.
9-10 – Полное решение задачи.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Задача 4.**

- *Выясните, полна ли система функций* $A = \{1, x \vee y, x \wedge y, x \to y\}$*?*
- *Постройте совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы для каждой функции из системы* $A$.

**Решение.**

а) **Ответ:** Система не полна — по т. Поста о замкнутых классах, поскольку все функции сохраняют 1, т.е. при подстановке набора переменных из одних 1 все функции дают значение 1.

*Примечание:* если не указывалась теорема Поста, то необходмо было доказать замкнутость свойства сохранения 1 относительно суперпозиции функций и введения несущественных переменных. "Из таблицы"истинности порождающих функций ответ к задаче "не очевиден".

b)

| | СДНФ | СКНФ |
|---|---|---|
| 1 | $\overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y} \vee x \wedge y$ | $x \vee \overline{x}$ |
| $x \vee y$ | $\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y} \vee x \wedge y$ | $x \vee y$ |
| $x \wedge y$ | $x \wedge y$ | $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y})$ |
| $x \to y$ | $\overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y \vee x \wedge y$ | $\overline{x} \vee y$ |

*Примечание:* указание 0 в качестве СКНФ для 1 является грубой ошибкой, поскольку СКНФ — формула, реализующая данную функцию, но $0 \neq 1$.

**Критерии №4, a)**
0-1 – Идея или определение полноты.
2-3 – Изучение свойств по таблице без доказательства.
4 – Доказательство без ссылки на т. Поста или неполное доказательство.
5 – полностью выполненный пункт.

**Критерии №4, b)**
0-1 – Идея или определение СДНФ и СКНФ, множественные ошибки в одной из КФ.
2-3 – Построенные формулы с ошибками в 2 и более случаях, 0 как СКНФ для 1.
4 – Ошибка в СКНФ для 1 (в основном, одна ошибка).
5 – полностью выполненный пункт.
При наличии ошибок в каждом из случаев частично снимались баллы.

**Задание 5.**

*Несколько раз подбрасывается игральная кость. Более вероятно, что выпадет четная или нечетная сумма очков?*

**Ответ:** События равновероятны.

(продолжение следует)

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Решение 1.**
Доказать по индукции.
$E_n$ – сумма при $n$ подбрасываниях четна.
$O_n$ – сумма при $n$ подбрасываниях нечетна.
$e_n$ – $n$-е подбрасывание дало четное число.
$o_n$ – $n$-е подбрасывание дало четное число.
База индукции:

$$P(E_1) = P(O_1) = \frac{3}{6} = 0.5;\ P(E_n) + P(O_n) = P(e_n) + P(o_n) = 1.$$

$$P(E_n) = P(E_{n-1}|e_n) * P(e_n) + P(O_{n-1}|o_n) * P(o_n).$$
$$P(O_n) = P(O_{n-1}|e_n) * P(e_n) + P(E_{n-1}|o_n) * P(o_n).$$

Остается применить предположение индукции.

**Решение 2.**
Как можно было заметить, важна лишь четность количества выпавших нечетных чисел. Рассматривая нечетность как успех, четность - как неудачу, мы приходим к схеме испытаний Бернулли с симметричной монетой - биномиальному распределению с параметром 1/2.

После этого нужно было показать, что

$$2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2k+1}$$

Последнее тождество доказывается путем раскрытия скобок в биноме Ньютона $(1-1)^n$ и переноса всех отрицательных слагаемых в правую часть.

**Критерии №5:**
0-2 – Были предложены незавершенные идеи.
3-5 – Предложено решение, но оно не верно или не объяснено.
6-7 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве.
8-10 – Правильное решение при описках или несущественных ошибках.

Решение в виде приведения дерева без доказательства с выкладками или примеров не засчитывалось. Симметричность биномиальных коэффициентов для второго решения работает только для нечетного $n$.

**Задача 6.** *Докажите, что среди шестерых человек всегда найдутся трое, которые либо все знают друг друга, либо ни один из них не знает других.*

**Ответ:** ■

**Решение.**
1. Условие задачи верно тогда и только тогда, когда оно верно для дополнения графа.
2. Либо в графе либо в его дополнении найдется вершина степени не меньше 3.

Если у этой вершины три ее соседа не соединены ребрами, то выполнено второе условие задачи. Если хотя бы двое из соседей соединены ребром, то мы получаем первое условие для данной вершины и двух ее соседей.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Критерии №6:**
0 – если использовалось "вероятностное решение".
1 – за любые другие неправильные попытки.
2-4 – если частично разобраны случаи, но заведомо не все.
5-8 – Если задача решена большим или неполным перебором. Чем меньше необходимых случаев, тем выше балл.
9-10 – если разобраны все случаи с использованием свойств графов.

**Задача 7**
*Найдите все вещественные решения уравнения* $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x} + 6x$.

**Ответ:** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{2x}\cos 2x + c_3e^{2x}\sin 2x - \frac{3}{8}(x+1) + \frac{1}{4}xe^{2x}$, где $c_1, c_2, c_3$ — произвольные вещественные константы.

**Решение.** Характеристическое уравнение для однородного уравнения $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 0$ имеет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$. Следовательно общее вещественное решение $y_0$ однородного уравнения может быть записано в виде

$$y_0 = c_1e^{2x} + c_2e^{2x}\cos 2x + c_3e^{2x}\sin 2x,$$

где $c_1, c_2, c_3$ — произвольные вещественные константы.
Частное решение уравнения $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = e^{2x}$ будем искать в виде $\tilde{y} = Axe^{2x}$. Подстановкой найдем $\tilde{y} = \frac{1}{4}xe^{2x}$. Частное решение $y^*$ уравнения $y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 6x$ будем искать в виде $y^* = Ax + B$. Подстановкой найдем $y^* = -\frac{3}{8}(x+1)$.
Откуда получаем

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{2x}\cos 2x + c_3e^{2x}\sin 2x - \frac{3}{8}(x+1) + \frac{1}{4}xe^{2x},$$

где $c_1, c_2, c_3$ — произвольные вещественные константы.

**Критерии №7:**
0-3 – Верно записано и решено характеристическое уравнение (возможно с неточностями)
4-7 – Верно выписано общее решение неодногородного уравнения (возможно с неточностями)
8-10 – Найдено частное решение системы (возможно с неточностями)

**Задача 8**
*Из совокупности всех подмножеств множества* $\{1, 2, \ldots, N\}$ *с равномерным распределением вероятности случайно и независимо выбираются два подмножества* $A$ *и* $B$. *Найдите вероятность, что* $A$ *и* $B$ *не пересекаются.*

**Ответ:** $(\frac{3}{4})^N$.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Решение.**

Число всех подмножеств множества из $N$ различных элементов равно $2^N$, число различных подмножеств мощности $i$ $(0 \leq i \leq N)$ равно

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!(N-i)!}.$$

Число подмножеств непересекающихся с заданным множеством мощности $i$ равно $2^{N-i}$.

Таким образом, число всех непересекающихся (упорядоченных) пар подмножеств равно

$$\sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i} 2^{N-i} = (1+2)^N = 3^N.$$

Число всех упорядоченных пар подмножеств множества из $N$ элементов равно $2^N \cdot 2^N = 4^N$.

Следовательно искомая вероятность равна $(\frac{3}{4})^N$.

**Критерии №8:**

1 – Осмысленная попытка решения.

2-5 – Правильная идея, но не доведена до решения – в зависимости от степени продвижения.

6-9 – В целом правильное решение, в котором присутсвуют технические неточности, ошибки доказательства или несущественные арифметические ошибки.

10 – Точное корректное решение.

**Задача 9.**

*Случайная величина $\xi$ принимает только натуральные значения и*

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$$

*Найдите неизвестную константу $c$ и математическое ожидание случайной величины $\xi$.*

**Решение:**

Мы хотим определить случайную величину $\xi : \Omega \to \mathbb{N}$, т.к. значения вероятностей при делении на знаменатель должны быть определены и, следовательно, $k$ принимает только натуральные значения. Обозначим через $p_k = P(\xi = k)$.

Далее мы обязаны проверить 3 свойства вероятности:

1. $p_k \geqslant 0$;
2. $p_k \leqslant 1$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Из первых двух следует, что значение константы $c$, если она существует, ограничивается неравенствами:

$$c \geqslant 0 \text{ и } c \leqslant k^2 + k.$$

Поскольку вершина параболы $y = k^2 + k$ с ветвями направленным вверх находится в точке с $k = -\frac{1}{2} < 1$, то последнее неравенство на константу $c$ превращается в неравенство $c \leqslant 2$, которое получается при подстановке $k = 1$ как минимального значения возрастающей ветви параболы.

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

Наконец, можно переходить к основной части задачи - пункту 3.

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = \lim_{n\to+\infty} S_k, \text{ где } S_k \text{ – частичная сумма ряда.}$$

$$S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c}{k} - \frac{c}{k+1}\right) = c \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_k = \lim_{n\to+\infty} c \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = c$$

Отсюда следует, что $c = 1$, и данное значение параметра удовлетворяет двум предыдущим неравенствам.

**Ответ: 9а)** $c = 1$.

Замечание: *Раскрытие скобок в бесконечном ряду приводило к знакопеременному ряду, в котором "сокращение"(по сути, перестановка скобок) без использования дополнительных утверждений не допустимо.* Вторая часть решения задачи сводилась к знанию определения математического ожидания $M\xi$ или $E\xi$:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \cdot \xi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \cdot k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

т.к. полученный ряд является расходящимся гармоническим рядом.

**Ответ: 9б)** $E\xi = +\infty$.

Замечание: *Желательным здесь было доказательство расходимости гармонического ряда по интегральному признаку Коши или доказательство того, что для любого натурального $N$ отрезок ряда от $N+1$ до $2 \cdot N$ больше $\frac{1}{2}$, что противоречит условию Коши сходимости ряда.*

**Критерии №9**

*Значение c*

- 0-2 Были попытки вычислить ряд. Отсутствовала или осталась не завершенной проверка всех свойств вероятности.
- 3 При вычислении ряда были необоснованно раскрыты скобки или ряд был представлен в виде разности двух расходящихся гармонических рядов.
- 4 При обосновании была допущена неточность. Частичные суммы ряда были выписаны не верно или со сдвигом по индексу.

*Математическое ожидание $\xi$*

- 0-2 Были попытки вычислить ряд для математического ожидания.
- 3 При объяснении допущена ошибка, не влияющая на ход решения.
- 4 Не обоснована расходимость ряда или нет указаний на то тот факт, что ряд гармонический.

**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2016 г.**
**Демонстрационный вариант**
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Задача 10**

*На плоскости задана декартова система с координатами $x$, $y$. При каких значениях вещественного параметра $a$ окружность $x^2 + y^2 = 4$ имеет хотя бы одно пересечение с прямой $ax + y = a^2$?*

**Ответ:** При $a \in \left[-\sqrt{2+2\sqrt{2}}, \sqrt{2+2\sqrt{2}}\ \right]$ прямая и окружность имеет хотя бы одно пересечение.

**Решение:** Прямая и окружность пресекаются тогда и только тогда, когда существует точка $(x, y)$ такая, что справедлива система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ ax + y = a^2, \end{cases}$$

то есть когда точка одновременно принадлежит и заданной окружности, и прямой.

Выразив $y$ через $x$ из уравнения прямой ($y = a^2 - ax$) и подставив в уравнение окружности, получаем

$$(1 + a^2)x^2 - 2a^3x + a^4 - 4 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $x$. Оно имеет действительное решение тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$D = 4a^6 - 4(1 + a^2)(a^4 - 4) \geq 0.$$

Упростив неравенство, получаем

$$a^4 - 4a^2 - 4 \leq 0.$$

Учитывая, что уравнение $z^2 - 4z - 4 = 0$ имеет два корня $z = 2 \pm 2\sqrt{2}$, получаем, что

$$a^4 - 4a^2 - 4 = (a^2 - 2 - 2\sqrt{2})(a^2 - 2 + 2\sqrt{2}) \leq 0.$$

Поскольку $a^2 \geq 2 - 2\sqrt{2}$ при любых $a$, так как $2 - 2\sqrt{2} < 0$, получаем неравенство

$$a^2 - 2 - 2\sqrt{2} \leq 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$|a| \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при $|a| \leq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$ существует точка пересечения окружности и прямой.

**Критерии №10:**
0-2 – Были предложены незавершенные идеи.
3-6 – Предложено решение, но оно не верно.
7-8 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве.
9-10 – Правильное решение при описках или несущественных ошибках.

**Задача 11**

*Найдите $\sigma^{2015}$, где* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 9 & 10 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

**Ответ:** $\sigma^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 8 & 6 & 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$

**Решение.**

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & 9 & 7 & 10\end{pmatrix}.$$
$$\sigma^{2015} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\end{pmatrix}^{2015}\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}^{2015}\begin{pmatrix}2 & 6 & 9 & 7 & 10\end{pmatrix}^{2015}.$$

Длина цикла равна его порядку в группе подстановок.

$$\sigma^{2015} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\end{pmatrix}^{2015\ \%\ 3}\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}^{2015\ \%\ 2}\begin{pmatrix}2 & 6 & 9 & 7 & 10\end{pmatrix}^{2015\ \%\ 5} =$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\end{pmatrix}^{2}\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}^{1}\begin{pmatrix}2 & 6 & 9 & 7 & 10\end{pmatrix}^{0} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}.$$

**Критерии №11:**
0 – Интерпретация задачи как возведение матрицы в степень.
0-1 – Была попытка решения, не доведенная до конца.
2-4 – Были попытки последовательных вычислений степени подстановки
или разложение в независимые циклы, сделанные с ошибкой.
5-6 – Ошибка при возведении одного или нескольких циклов, сдвиг циклов на 1.
7-8 – Баллы вычитались из 10 в зависимости от характера сделанных ошибок.
9-10 – Верное решение.

**Задача 12**
*Пусть $V$ и $W$ — двумерные подпространства в $\mathbb{R}^4$. Какие значения может принимать размерность подпространства $W \cap V$?*

**Ответ: 0, 1, 2**

**Решение.**
Каждое линейное подпространтсво размерности 2 в $\mathfrak{R}^4$ задается системой 2 линейнонезависимых линейных уравнений с 4 переменными.

Пересечение двух подпространств - линейное подпространтсво, задающееся системой из 4 линейных уравнений, при это ранг матрицы не меньше 2. Значит размерность простраства решений не больше $dim\mathfrak{R}^4 - 2 = 4 - 2 = 2$. Остается подобрать примеры на каждый из случаев 0, 1, 2.

**Критерии №12:**
0-3 – Была попытка решения, не доведенная до конца.
4-6 – Ошибка при вычислении некоторых слагаемых или арифметическая ошибка,
которая привела к существенно некорректному виду ряда.
7-8 – Баллы вычитались из 10 в зависимости от сделанных арифметических ошибок.
8 – Ошибка в подстановке k.
9 – Не объяснена перегруппировка слагаемых.
10 – Верное решение.

**Задача 13** *Покажите, что если в $n$-вершинном графе без петель и кратных ребер нет циклов нечетной длины и число ребер больше $(\frac{(n-1)}{2})^2$, то граф связен ($n \geqslant 2$).*

**Ответ:** ■

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Решение.** Если в графе нет циклов нечетной длины, то он является двудольным. Пусть в первой доле будет будет $k$ вершин ($0 \le k \le n$, где $n$ – количество вершин в графе), тогда во второй будет $(n-k)$ вершин. Несвязный граф с максимальным количеством ребер строится как полный двудольный граф $K_{k-1,n-k}$ или $K_{k,n-k-1}$ и одна отдельностоящая вершина. Количество ребер будет $(k-1)(n-k)$ или $k(n-k-1)$ соответственно.Чтобы получить связный граф, нужно добавить еще 1 ребро. Все, что остается - доказать, что в худшем случае. когда достигается максимальное значение количества ребер, оно удовлетворяет неравенству из условия:

$$\begin{cases} (k-1)(n-k)+1 > \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, \\ k(n-k-1)+1 > \left(\frac{n-1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arg\max(k-1)(n-k)+1 = \frac{n+1}{2}, \\ \arg\max k(n-k-1)+1 = \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

Максимум количества ребер совпадает в обоих случаях и равен $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+1$, что и доказывает требуемое утверждение.■

**Критерии №13:**

1-5 – Если не установлено, что граф двудольный.

Количество баллов в этом случае определялось степенью использования сведений о графах (попытки использовать метод математической индукции).

5-8 – Определяется степенью обоснования максимального числа связей.

9-10 – Если обоснование было правильное.

**Задача 14**

*Дано $2N$ точек на плоскости, координаты которых хранятся в массивах $X$ и $Y$. Напишите алгоритм, эффективно вычисляющий уравнение прямой, относительно которой в каждой открытой полуплоскости будет лежать ровно $N$ из заданных точек.*

**Ответ:** Псевдокод или код или блок-схема + доказательство корректности и возможная оценка эффективности.

**Решение.** Через каждую пару точек проведем прямую. Построим еще одну прямую $l$, не параллельную ни одной из этих прямых, и так чтобы все точки лежали в одной полуплоскости относительно $l$. Все точки будут находиться на разных расстояниях от $l$ (иначе через такие точки можно было бы провести прямую параллельную $l$). Найдем $N$-ю и $(N+1)$-ю порядковые статистики (порядковый номер расстояния в массиве расстояний, если бы он был упорядочен) относительно данного расстояния и проведем прямую, параллельную $l$, разделяющую точки, соответствующие данным статистикам.

**Критерии №14:**

0-4 – Есть идеи решения, но они не обоснованы.

5-7 – Написан алгоритм, неучитывающий совпадения некоторых точек.

8-10 – Приведено в целом верное решение, содержащее неточности или не полностью обоснованное доказательство или не до конца описанный псевдокод.