Олимпиада для студентов и выпускников вузов

Демонстрационный вариант и методические рекомендации по направлению «Математика»

Профили:
«Mathematics»
«Математическая физика»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполения задания — 240 минут

Каждая из задач оценивается из 20 баллов, если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам.

Each problem costs 20 points, if the sum exceeds 100, the result is equal to 100 points.

I. Общая часть / COMMON PART

Решения задач в этой части можно записывать по-русски или по-английски.

Solutions of the problems in this section should be written in Russian or in English.

1. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

1. Does the following series converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

Решение. Поскольку $n < 3^n$, имеем $n^{\frac{1}{n}} < 3$, а значит,

$$\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}} > \frac{1}{3n}.$$

Как известно, гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится. Значит, по признаку сравнения наш ряд тоже расходится. $\square$

Solution. Since $n < 3^n$, we have $n^{\frac{1}{n}} < 3$, hence

$$\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}} > \frac{1}{3n}.$$

Recall that the the harmonic series $\sum \frac{1}{n}$ diverges. Therefore, the above inequality implies that our series diverges as well. $\square$

2. Пусть G — конечная группа, а $\alpha : G \to G$ — автоморфизм группы G, такой что $\alpha(x) = x$ только если x является единичным элементом. Докажите, что всякий элемент группы G может быть представлен в виде $x^{-1}\alpha(x)$, где $x \in G$.

2. Let G be a finite group, and $\alpha : G \to G$ an automorphism of G such that $\alpha(x) = x$ only if x is the identity. Prove that every element of the group G can be represented in the form $x^{-1}\alpha(x)$, where $x \in G$.

Решение. Докажем, что отображение $\beta : G \to G$, заданное формулой $\beta(x) = x^{-1}\alpha(x)$, биективно. Для этого достаточно показать, что оно инъективно. Допустим, $\beta(x) = \beta(y)$. Тогда

$$x^{-1}\alpha(x) = y^{-1}\alpha(y),$$

откуда

$$\alpha(x)\alpha(y)^{-1} = xy^{-1}.$$

Поскольку α — автоморфизм, имеем

$$\alpha\left(xy^{-1}\right) = xy^{-1}.$$

Следовательно, $xy^{-1} = e$, то есть $x = y$.

Итак, отображение β инъективно, а значит, биективно. $\square$

Solution. Consider the map $\beta : G \to G$ given by $\beta(x) = x^{-1}\alpha(x)$. We need to prove that β is surjective. Since G is finite, it is enough to prove that β is injective. Suppose that $\beta(x) = \beta(y)$. Then

$$x^{-1}\alpha(x) = y^{-1}\alpha(y),$$

hence

$$\alpha(x)\alpha(y)^{-1} = xy^{-1}.$$

Since α is an automorphism,

$$\alpha\left(xy^{-1}\right) = xy^{-1}.$$

Thus $xy^{-1} = e$, therefore $x = y$.

Finally, β is injective, hence it is surjective. $\square$

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан эллипсоид с главными полуосями a, b, c. Вокруг него произвольным образом описан прямоугольный параллелепипед (так, что эллипсоид касается каждой из граней параллелепипеда). Найдите длину главной диагонали параллелепипеда.

3. In the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, an ellipsoid with semi-principal axes of lengths a, b, c is given. A rectangular parallelepiped is circumscribed around it so that the ellipsoid is tangent to all faces of the parallelepiped. Compute the length of the principle diagonal in the parallelepiped.

4. Решите уравнение $u_t = -u^2 u_x$ с начальным условием $u(x,0) = \cos x$. Найдите максимальное значение T, такое, что неособое решение существует на множестве $t \in [0,T)$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Solve the initial value problem $u_t = -u^2 u_x$, $u(x,0) = \cos x$. Find the maximal value of T such that a non-singular solution exists on the set $t \in [0,T)$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Рассмотрим график $\Gamma = \{\,(x,t,u) \mid u = u(x,t)\,\} \subset \mathbb{R}^3$ функции u. Из уравнения $u_t = -u^2 u_x$ следует, что для каждой точки $(x,t,u) \in \Gamma$ вектор $(u^2,1,0)$ — касательный к Γ. Действительно, производная функции $u-u(x,t)$ вдоль этого вектора равна $-u^2 u_x - u_t = 0$. Следовательно, Γ состоит из отрезков прямых вида $(x_0 + u_0^2 t, t_0 + t, u_0)$. Поэтому $u(x + t\cos^2 x, t) = \cos x$.

Решение является неособой функцией для t, таких что отображение $h : x \mapsto x + t\cos^2 x$ — дифферморфизм вещественной прямой. Производная $h'(x) = 1 - t\sin 2x$ строго положительна для всех x тогда и только тогда, когда $|t| < 1$. Следовательно, $T = 1$.

Answer: $u(x + t\cos^2 x, t) = \cos x$, $T = 1$. □

Solution. Consider the graph $\Gamma = \{\,(x,t,u) \mid u = u(x,t)\,\}$ of u in $\mathbb{R}^3$. The equation $u_t = -u^2 u_x$ implies that for each point $(x,t,u) \in \Gamma$, the vector $(u^2,1,0)$ is tangent to Γ. Indeed, the derivative of $u - u(x,t)$ along this vector is equal to $-u^2 u_x - u_t = 0$. Therefore, Γ consists of segments of lines of the form $(x_0 + u_0^2 t, t_0 + t, u_0)$. Thus $u(x + t\cos^2 x, t) = \cos x$.

The solution is non-singular for t such that the map $h : x \mapsto x + t\cos^2 x$ is a diffeomorphism of the real line. The derivative $h'(x) = 1 - t\sin 2x$ is strictly positive for all x if and only if $|t| < 1$.

Answer: $u(x + t\cos^2 x, t) = \cos x$, $T = 1$. □

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Block 1 «Mathematics»

*Solutions of the problems in this section should be written in **English**.*

1. Let n be the number of ordered triples (A_1, A_2, A_3) consisting of sets A_1, A_2, A_3 such that

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Find the prime factorization of n.

Solution. It is easy to see that each number from 1 to 10 may belong either to exactly one of A_i, or to exacly two of A_i. Hence, we have 6 choices for each number from 1 to 10, 6^{10} choices in total. □

2. Let V be a finite dimensional vector space over the field of real numbers. The sum $A + B$ of sets $A, B \subset V$ is defined as the set of all vectors of the form $a + b$, where $a \in A$, $b \in B$. For any $\lambda \in \mathbb{R}$, the set λA is by definition the set of all vectors of the form λa, where $a \in A$. Prove that an open set A satisfies the equality $A + A = 2A$ if and only if A is convex.

Solution. Note that $A + A \supset 2A$ for any $A \subset V$. Therefore, $A + A = 2A$ is equivalent to

$$\forall x \in A \forall y \in A\, \frac{x+y}{2} \in A. \tag{1}$$

Recall that A is convex if and only if

$$\forall \lambda \in [0,1] \forall x, y \in A\, \lambda x + (1-\lambda)y \in A. \tag{2}$$

Note that (1) is exactly (2) for $\lambda = \frac{1}{2}$. Therefore, for a convex A we have $A + A = 2A$.

Consider an open set A such that $A + A = 2A$. Let us prove (2). Denote by $B_\varepsilon(p)$ the open ball $\{\, q \in V \mid \|q - p\| < \varepsilon \,\}$. It is easy to see that

$$\frac{1}{2}\left(B_\varepsilon(p_1) + B_\varepsilon(p_2)\right) = B_\varepsilon\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \tag{3}$$

Fix $x, y \in A$. Since A is open, there exists $\varepsilon > 0$ such that A includes both $B_\varepsilon(x)$ and $B_\varepsilon(y)$. Thus (1) and (3) imply that A includes $B_\varepsilon\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Proceeding by induction, we can easily prove that A includes $B_\varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y)$ for all rational $\lambda \in [0,1]$ of the form $\frac{n}{2^m}$. Clearly, the union of all these balls includes the segment $[x, y]$. □

Блок 2. «Математическая физика»

Решения задач в этой части следует записывать по-русски.

1. Грузик массы m на двух пружинах жесткости k подвешен между вертикальными стенками. В исходном положении обе пружины ориентированы горизонтально и не испытывают натяжения, грузик находится на расстоянии ℓ от каждой из стен. Силы тяжести нет. В начальный момент времени грузику придается скорость v_0 в вертикальном направлении. Определите зависимость скорости грузика от его положения.

Решение. В силу симметрии системы пружин и начальных данных ясно, что грузик будет совершать колебательные движения вдоль вертикальной прямой относительно исходного положения равновесия. Введем координатную ось OX, направленную вертикально вверх и начало отсчета координат выберем в точке исходного положения грузика. Зависимость скорости грузика от его положения (координаты x) легко находится из закона сохранения механической энергии, который справедлив в силу отсутствия трения. В исходном положении пружины не деформированы, следовательно потенциальная энергия деформации равна нулю и полная механическая энергия системы W совпадает с начальной кинетической энергией грузика:

$$W(0) = \frac{mv_0^2}{2}.$$

При смещении грузика в точку с координатой x удлинение $\Delta\ell$ каждой пружины составит

$$\Delta\ell = \ell(x) - \ell = \sqrt{x^2 + \ell^2} - \ell,$$

и, в соответствии с законом Гука, потенциальная энергия деформации каждой пружины будет равна

$$\frac{1}{2}\,k(\Delta\ell)^2.$$

Таким образом, полная механическая энергия системы при нахождении грузика в точке x равна

$$W(x) = \frac{mv(x)^2}{2} + k(\Delta\ell)^2,$$

где $v(x)$ — модуль искомой скорости грузика. Закон сохранения механической энергии $W(0) = W(x)$ дает ответ задачи:

$$v(x)^2 = v_0^2 - \frac{2k}{m}\,(\sqrt{x^2 + \ell^2} - \ell)^2,$$

причем смещение x грузика по вертикали ограничено неравенством: $|x| \le x_{max}$, так как величина $v(x)^2$ всегда неотрицательна. Крайнее положение x_{max} находится из условия $v(x_{max}) = 0$:

$$x_{max}^2 = \frac{mv_0^2}{2k} + 2\ell\sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}.$$

□

2. Заряд Q равномерно распределен вдоль тонкого кольца радиуса R. На прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости, на расстоянии r от центра кольца расположена материальная точка массы m, имеющая заряд q того же знака, что и Q. Какую минимальную скорость необходимо сообщить материальной точке в направлении кольца, чтобы она прошла через центр кольца?

Решение. На заряженную материальную точку будет действовать потенциальная сила электростатического взаимодействия — сила Кулона. Для решения задачи применим закон сохранения полной энергии системы заряженное кольцо и материальная точка. Эта энергия равна сумме кинетической энергии материальной точки и электростатической энергии взаимодействия заряженного кольца с точечным зарядом q. В силу симметрии распределения заряда по кольцу материальная точка будет двигаться вдоль прямой, проходящей через центр кольца. Для вычисления электростатической энергии взаимодействия W воспользуемся формулой

$$W(x) = \varphi_Q(x)q,$$

где $\varphi_Q(x)$ — электростатический потенциал, создаваемый заряженным кольцом на его оси симметрии на расстоянии x от центра кольца. Поскольку рассматриваемая ось симметрии перпендикулярна плоскости кольца, то все элементарные заряды кольца равноудалены от этой оси и создаваемый ими электростатический потенциал легко находится из принципа суперпозиции:

$$\varphi_Q(x) = \kappa \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

где коэффициент κ зависит от выбранной системы единиц измерения. Например, в системе СГСЭ $\kappa = 1$, в системе СИ $\kappa = 1/4\pi\varepsilon_0$ и т.п.

Запишем теперь закон сохранения полной энергии, считая, что материальная точка получает начальную скорость v_0 и проходит через центр кольца с некоторой скоростью u:

$$\frac{mv_0^2}{2} + W(r) = \frac{mu^2}{2} + W(0).$$

Поскольку $u^2 \geq 0$, то на величину начальной скорости v_0 получается ограничение снизу:

$$v_0^2 \geq \frac{2\kappa Qq}{mR}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right).$$

Если это неравенство не выполнено, материальная точка не достигнет центра кольца (кулоновская сила отталкивания остановит частицу где-то между начальным положением и центром кольца). Равенство в приведенном выше выражении дает минимальную начальную скорость, при которой заряженная частица достигнет центра кольца. □

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Задачи на математической олимпиаде, как правило, немного сложнее, чем на экзамене в магистратуру. Решение этих задач требует не только определенной теоретической подготовки, но и оригинальной стратегии решения. Теоретическая подготовка должна включать следующие темы (в рамках стандартной программы математических факультетов):

- общая алгебра (включая теорию групп и элементы комбинаторики)
- линейная алгебра
- математический анализ (включая многомерный анализ и теорию меры)
- комплексный анализ
- обыкновенные дифференциальные уравнения
- простейшие методы теории уравнений с частными производными

Для решения некоторых задач блока «Математика» необходимо знакомство с топологией (общая топология, фундаменальные группы). В варианте олимпиадного задания, конечно, могут быть представлены не все из перечисленных тем.

В задачах блока «Математическая физика» используются основные понятия классической механики и электродинамики.

Содержание следующих книг и учебных пособий полностью покрывает необходимый теоретический материал.

- Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М: Факториал 1999
- А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль I, записки лекций `http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-1/m1_total.pdf`
- И.Р. Шафаревич, Основные понятия алгебры, Ижевск: РХД 1999
- И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
- В.А. Зорич, Математический анализ, М: МЦНМО 2007
- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
- В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, Геометрия, М: МЦНМО 1997
- Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Лань 2004
- В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: РХД 2000
- В.И. Арнольд, Лекции об уравнениях с частными производными, М: Фазис 1999
- В.И. Арнольд, Математические методы классической механики, Москва: Наука 1979
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т.1, Механика, Москва: Физматлит, 2004
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т.2, Теория поля, Москва: Физматлит, 1988
- О.Я. Виро, О.А. Иванов, В.М. Харламов и Н.Ю. Нецветаев, Элементарная топология, `http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/rus-book.pdf`