

Направление «Прикладная математика»

Профиль:
«Прикладная математика»

КОД - 030

Время выполнения задания – 240 мин.

Задание включает 5 задач.

Задача 1.(20 баллов)

(дифференциальные уравнения, теория управления)

Для неустойчивого управляемого объекта 1-го порядка $\frac{dx_1}{dt} = x_1 + u$ построить управление u , обеспечивающее по окончании переходного процесса практически точное отслеживание входного гармонического воздействия x_3 .

Этот полезный сигнал определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_2 \end{cases}$$

Функция управления u принимается в виде линейной функции состояния $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$:

$$u = -cx.$$

Время переходного процесса принять равным 5 сек.

Задача 2.(10 баллов)

(теория управления)

Приведите уравнение элемента чистого запаздывания в пространстве оригиналов и в пространстве изображений, а также его временные характеристики: переходный процесс (построить график), импульсную переходную функцию (построить график); частотные характеристики: амплитудно-фазовую, амплитудно-частотную и фазо-частотную.

Задача 3.(20 баллов)

(линейная алгебра)

Квадратные матрицы A , B называются подобными, если существует невырожденная матрица C такая, что $B = C^{-1}AC$, где C^{-1} — обратная для C матрица (заметим, что такая матрица C определена неоднозначно).

Доказать, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ подобны, и найти какую-нибудь матрицу C , для которой $B = C^{-1}AC$.

Задача 4.(20 баллов)

(шифрование и криптография)

Итальянскому математику XVI века Джероламо Кардано приписывается идея шифра перестановки, основанного на использовании квадратного трафарета с прорезанными отверстиями. Данный шифр известен как «поворотная решетка» или «решетка Кардано».

Для зашифрования трафарет, в котором отверстия прорезаны таким образом, чтобы за 4 приложения решетки к листу бумаги, между которыми происходит поворот трафарета вокруг оси на угол, кратный 90° , все пространство под трафаретом оказалось бы заполненным. При этом не допускаются совмещения пространства под прорезями, что налагает особые условия на размеры трафарета и выбор мест для прорезей в нем. Нетрудно убедиться, что для исключения самосовмещения в центре трафарета длина его стороны должна составлять четное число позиций для вписывания букв открытого текста. Далее сами прорезы должны быть сделаны так, чтобы при первом приложении трафарета можно было вписать первую четверть сообщения (или той его части, которая зашифровывается за один цикл – то есть одного блока), при следующем – вторую и так далее. После вписывания четвертой четверти сообщения зашифрованный текст выписывается по строкам сверху вниз и в таком виде может быть передан по каналу связи. Рассмотрим пример: пусть у нас имеется блок сообщения, содержащий следующий текст: «История криптографии насчитывает не одно тысячелетие. Уже в исторических документах ...». Размер используемого трафарета, который и является ключом, 8×8 , в нем прорезано 16 отверстий, с помощью которых будут вписываться буквы. Он приведен на рис. 1.

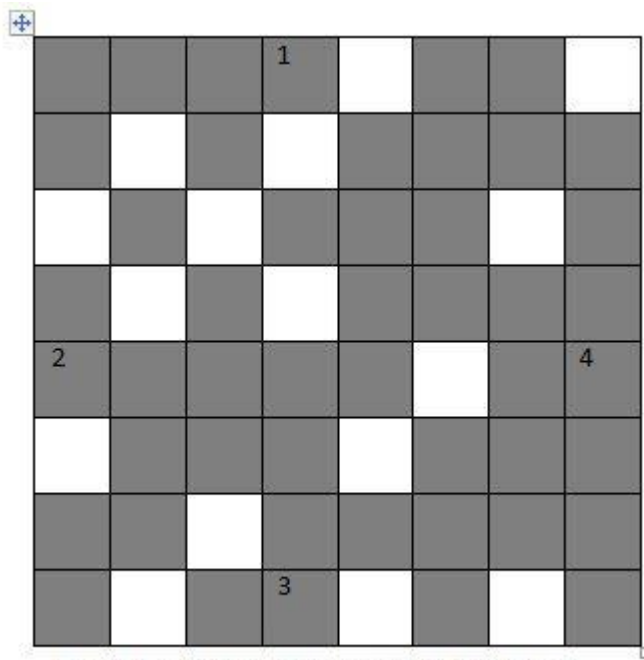


Рисунок 1. Ключ шифра «Решетка Кардано»

В результате первого приложения трафарета и вписывания символов открытого текста по строкам слева направо и сверху вниз, получаем вид листа под трафаретом, приведенный на рис. 2. После этого трафарет поворачивается по часовой стрелке, так что верхней становится его сторона, помеченная цифрой 2, а вновь открывшиеся места заполняются буквами открытого текста по такому же принципу. Затем эта операция повторяется еще дважды и в результате получается сообщение, приведенное на рисунке 3.

				И			С
	Т		О				
Р		И					Я
	К		Р				
					И		
П				Т			
		О					
	Г			Р		А	

Рисунок 2. Буквы открытого текста, вписанные при первом приложении трафарета

Ж	О	Ф	Д	И	И	Н	С
И	Т	Е	О	Н	О	А	В
Р	С	И	Т	И	Ч	Я	Ы
С	К	С	Р	И	Т	Т	О
Ы	Р	В	И	Я	И	Ч	А
П	Е	Ч	Е	Т	Л	Е	Е
Т	С	О	К	Т	Н	И	И
Е	Г	Х	У	Р	Д	А	Е

Рисунок 3. Результат четырехкратного приложения трафарета и вписывания букв открытого текста

По открытому тексту и соответствующему шифротексту определите расположение прорезей на трафарете размером 6х6 позиций для вписывания букв, использованном для зашифрования, в его первом положении.

Открытый текст: МНОГИЕПРАВИТЕЛИШИФРОВАЛИВАЖНЫЕЗАПИСИ

Шифротекст: ВНМРИОНВЫТЕОЕГЛАИИЗЛЕАИПВШИИПАРСАЖФИ

Задача 5.(30 баллов)

(операционные системы, системное программирование)

Определить значения переменных a , b , c , d , n , k , m , p после выполнения программы на языке программирования Си в UNIX-подобной операционной системе при условии, что файла *a.txt* не существует в текущей директории. Какие значения этих переменных будут при повторном запуске программы? Обосновать свое решение.

```
#include <stdio.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>

void main()
{ int a, b, c, d, k, m, n, i, p;
  char buf[50];
  i = creat("a.txt", 302);
  k = write(i, "good\n", 6);
  a = i;
  close(i);
  b = open("a.txt", 1);
  m = write(b, "hello\n", 12);
  c = open("a.txt", 0);
  d = read(c, buf, 3);
  n = read(d, buf, 10);
  p = read(c, &buf[d+n], 6);
}
```