Олимпиада для студентов и выпускников по направлению
«Математика»

Профили:
«Mathematics»
«Математическая физика»

Время выполения задания — 240 минут

Каждая из задач оценивается из 20 баллов, если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам.
Each problem costs 20 points, if the sum exceeds 100, the result is equal to 100 points.

I. Общая часть / COMMON PART

Решения задач в этой части можно записывать по-русски или по-английски.
Solutions of the problems in this section should be written in Russian or English.

1. В игру играет один игрок. Он бросает игральную кость (кубик с числами от 1 до 6 на гранях) пять раз. Игрок выигрывает, если все выпавшие числа не меньше 4, а их сумма не меньше 25. Найдите вероятность выигрыша, если выпадение каждой из граней кубика происходит с вероятностью 1/6.

1. Consider the following dice game with one player. The player throws a die (a cube with numbers from 1 to 6) five times. He wins if all values are at least 4 and their sum is at least 25. Find the probability of the event “player wins” if all faces of the die have probability 1/6.

2. Обозначим символами $x_1, x_2, \dots, x_5$ корни полинома

$$F(x) = x^5 + 2x^3 + px^2 + qx + r,$$

где p, q и r — заданные вещественные числа.

a) Докажите, что при любых вещественных p, q и r многочлен F имеет комплексные невещественные корни.

b) Найдите значение выражения

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x^{\mathbf{4}} + x_5^4.$$

2. Let $x_1, x_2, \dots, x_5$ be the roots of the polynomial

$$F(x) = x^5 + 2x^3 + px^2 + qx + r,$$

where p, q and r are given real numbers

a) Prove that for any p, q and r the polynomial F has a complex non-real root.

b) Find the value of

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4.$$

3. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где функции P и Q имеют вид

$$P(x,y) = y\log(x+y) - \frac{y^2}{x+y}, \qquad Q(x,y) = x\log(x+y) - \frac{x^2}{x+y},$$

а контур $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой отрезок параметрически заданной кривой

$$x(t) = e^t - 1, \quad y(t) = 1 - \sin(t)$$

между точками, отвечающими $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/2$.

3. Compute the integral

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

where P and Q are given by

$$P(x,y) = y\log(x+y) - \frac{y^2}{x+y}, \qquad Q(x,y) = x\log(x+y) - \frac{x^2}{x+y},$$

and γ is the segment of the curve

$$x(t) = e^t - 1, \quad y(t) = 1 - \sin(t)$$

between the points corresponding to $t_1 = 0$ and $t_2 = \pi/2$.

4. Существуют ли матрицы A и B размера 2016×2016, такие что многочлены от A и B порождают подпространство размерности

a) 2042;

b) 2016^2.

4. Do there exist matrices A and B of size 2016×2016 such that the set of polynomials of A and B generates a subspace of dimension

a) 2042;

b) 2016^2.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Since you are applying for the "Mathematics" progam, solve only the problems from the first block.

Block 1 «Mathematics»

*Solutions of the problems in this section should be written in **English**.*

1. Let f be the 10th iteration of the map $z \mapsto z^2 + 2$. Find the number of connected components of the set $f^{-1}(D)$, where $D = \{ z \mid |z| < 10 \}$.

2. Let F_2 be the free group with two generators. Prove that the commutator subgroup of F_2 is not finitely generated.

Блок 2. «Математическая физика»

Решения задач в этой части следует записывать по-русски.

1. Однородный тонкий жесткий стержень длины ℓ и массы M может без трения свободно двигаться в горизонтальной плоскости. На концах стержня закреплены точечные массы m.

a Определите число степеней свободы данной системы, введите соответствующие обобщенные координаты и составьте лагранжиан системы.

b Напишите лагранжевы уравнения движения в терминах выбранных обобщенных координат.

c Напишите выражения для интегралов движеня данной системы (если такие имеются).

2. Точечный электрический заряд q покоится на оси Oz декартовой прямоугольной системы координат на расстоянии a от плоскости xOy, которая представляет собой бесконечную проводящую пластину.

1. Найдите модуль электростатической силы, действующей на заряд q.

2. Найдите потенциальную энергию взаимодействия заряда и пластины.

3. Найдите выражение поверхностной плотности зарядов $\sigma(x, y)$, индуцированных на проводящей пластине в точке с координатами (x, y).