

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

Ответ: $9 - 8765432 - 1$.

2. Существует ли четырехугольник, который можно разрезать на три равных треугольника двумя разными способами? Если не существует – докажите, если существует – постройте пример.

Решение: Трапеция с основаниями BC и AD длины 1 и 2 соответственно и боковой стороной CD длины $\sqrt{3}$, перпендикулярной основаниями. Разрезания $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM$ и $\triangle ABM, \triangle BDM, \triangle BCD$ где M – середина AD .

3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

Решение: Пусть за победившие команды болеют x и y человек, за проигравшие z и t . Тогда на вопросы про эти команды ответило $x + z + t, y + z + t, z$ человек соответственно. Значит, за Зенит болеет 200 человек, за Локомотив 300, за Спартак никто, а за Динамо 100 человек.

Критерии: \mp – правильный ответ без обоснования,
 \pm – арифметическая ошибка, или небольшие пробелы в обосновании.

4. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел x и y . Строго обоснуйте ответ.

Решение: Поделим на 5. $4x^2 + 16xy + 19y^2$. По модулю 4 или 0 или 3. 3 может быть: $x = 2, y = -1$. Ответ – 15.

Критерии: \mp – получен ответ без обоснования.

5. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a + b + ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

Ответ: $(1 + 1)(1 + 1/2) \dots (1 + 1/100) - 1 = 101 - 1 = 100$.

Решение: Необходимо показать ассоциативность операции для трёх произвольных a, b, c , а затем провести вычисление, заметив, что на каждом шаге получается выражение вида $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_{k-1}) - 1$.

Критерии: \mp – ответ без доказательства независимости от порядка операций.

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка – последовательности стрелочек "вверх", "вниз", "влево" и "вправо", причём две противоположенные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с "вниз"), то убирает это первое "вниз", ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался "вверх", "вправо", "влево". Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Решение: Разобьём слова, написанные на доске на 4 класса U, D, L, R согласно первой букве (будем маленькими буквами u, d, l, r обозначать число элементов в них, $u+d+l+r = 1000000$). Тогда в тетради ученика U будет написано $u+l+r$ слов, начинающихся на “вверх” (ибо к любому слову не из класса D он припишет “вверх”). Значит, если у него в тетради содержится N_u новых слов, то $u+l+r \leq u+N_u$. Написав три аналогичных неравенства и сложив их вместе, получим, что $3(u+d+l+r) \leq (u+d+l+r) + (N_u+N_d+N_l+N_r)$, то есть $N_u+N_d+N_l+N_r$ не меньше 2000000.