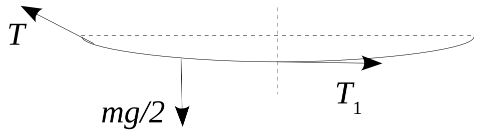
Решения олимпиадных задач, 11 класс



1. Записывая условие равновесия половинки цепочки (см. рис.) в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, получаем

$$T_1 - T\cos\alpha = 0;$$
$$T\sin\alpha - mg/2 = 0.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{mg}{2\,tg\,\alpha} = 4.2\,H;$$
$$T = \frac{mg}{2\sin\alpha} = 5\,H.$$

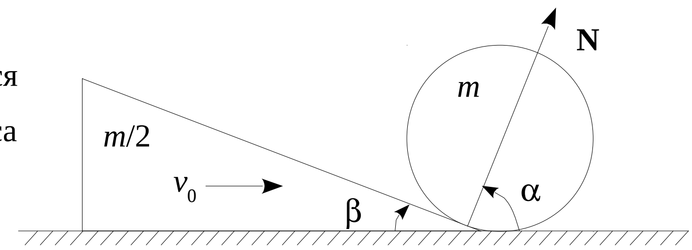
2. Пусть x – смещение корабря в вертикальном направлении от положения равновесия. Тогда второй закон Ньютона дает для периода колебаний:

$$m\ddot{x} = -\rho g S x \;\Rightarrow\; \omega^2 = \frac{\rho g S}{m} \;\Rightarrow\; T^2 = 4\pi^2\frac{m}{\rho g S}.$$

Записывая последнее выражение для квадрата периода для двух случаев – пустого и груженого корабля, получаем для массы груза

$$M = \frac{\rho g S}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = 900\,т.$$

3. При столкновении клина с шаром возникает сила реакции со стороны клина **N**, направленная под углом $\alpha = \pi/2 - \beta$ к горизонту. Значит, после столкновения скорость шара будет направлена под углом α к горизонту.



При столкновении сохраняются кинетическая энергия и проекция импульса на горизонтальное направление:

$$\frac{m}{4}v_0^2 = \frac{m}{4}v_к^2 + \frac{m}{2}v_ш^2;$$
$$\frac{m}{2}v_0 = \frac{m}{2}v_к + m v_ш\cos\alpha.$$

Решая эту систему уравнений, получаем для скоростей шара и клина после столкновения:

$$v_ш = v_0\frac{2\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha};\quad v_к = v_0\frac{1-2\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha},$$

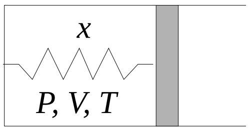
Для данного в задаче угла α = π/3 получаем, что скорость клина и горизонтальная составляющая скорости шара равны:

$$v_к = v_{ш,\,гор} = \frac{1}{3}v_0.$$

Это значит, что при приземлении шар ударится одновременно о клин и о горизонтальную поверхность. Следовательно, время полета шара равно

$$t=2\frac{v_{ш,верт}}{g}=2\frac{v_0}{g}\frac{\sin 2\beta}{1+2\sin^2\beta}=0.6\,c.$$

4. Поскольку количество газа остается неизменным, то можно написать



$$\frac{P_0 V_0}{T_0}=\frac{PV}{T}$$

Процесс нагревания предполагается квазистатическим, значит, сила упругости уравновешивается силой давления газа. Если S – площадь поперечного сечения поршня, то можно написать

$$PS=kx=k\frac{V}{S}\;\Rightarrow\; P=k\frac{V}{S^2}\;\Rightarrow\;\frac{P_0}{V_0}=\frac{P}{V}.$$

Количество теплоты, подведенное к газу идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение работы против силы упругости:

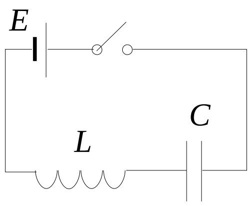
$$Q=\nu C_V\Delta T+\frac{k}{2}x^2=\nu C_V\Delta T+\frac{P_0}{2V_0}V^2=\nu C_V\Delta T+\frac{P_0}{2V_0}V\frac{V_0}{P_0}P=\nu C_V\Delta T+\frac{P_0V_0}{2T_0}\Delta T\,,$$

откуда теплоемкость системы

$$C=\frac{Q}{\Delta T}=\frac{P_0V_0}{T_0}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=2\frac{P_0V_0}{T_0},$$

где использовано $C_V=3R/2=3P_0V_0/T_0$.

5. При замыкании ключа в цепи возникнут гармонические колебания тока с частотой, равной резонансной частоте контура:



$$I(t)=I_0\sin(\omega t),\quad \omega=1/\sqrt{LC}.$$

Когда ток достигнет максимального значения, заряд на конденсаторе обратится в нуль, а ЭДС индукции катушки будет равна ЭДС батареи:

$$|E_{инд}|=I_0L\omega=E\,,$$

откуда получаем для амплитуды тока

$$I_0=\frac{E}{\omega L}=E\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Это и есть максимальный ток в цепи.