

Решения олимпиадных задач, 9 класс

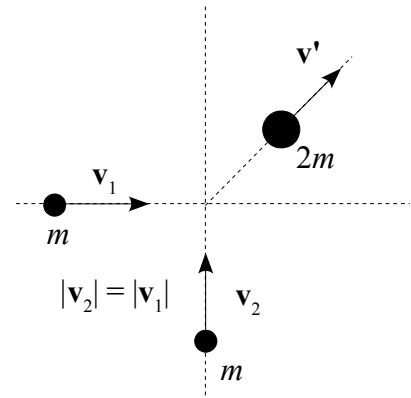
1. Применение законов сохранения импульса и энергии к ситуации в задаче дает (см. рис. 1):

$$2v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = v/\sqrt{2}$$

$$2 \frac{mv^2}{2} = \frac{(2m)v'^2}{2} + Q,$$

Откуда

$$Q = \frac{mv^2}{2} = 18 \text{ Дж}$$



2. Сделаем два упрощающих решение предположения:

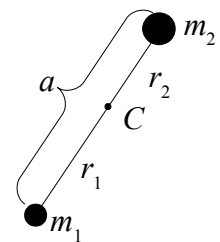
- 1) тела до и после потери массы движутся по круговым орбитам;
- 2) диаметры орбит остаются неизменными.

Тогда (см. рис.) в системе отсчета центра масс (C)

$$m_1 \omega^2 r_1 = \frac{G m_1 m_2}{a^2};$$

$$m_2 \omega^2 r_2 = \frac{G m_1 m_2}{a^2};$$

$$r_1 + r_2 = a,$$



где ω — угловая скорость вращения тел вокруг центра масс, связанная с периодом обычным соотношением $\omega = 2\pi/T$. Решая приведенные выше уравнения, получаем связь между периодом и диаметром орбиты:

$$T^2 = \frac{4\pi a^3}{G(m_1 + m_2)}.$$

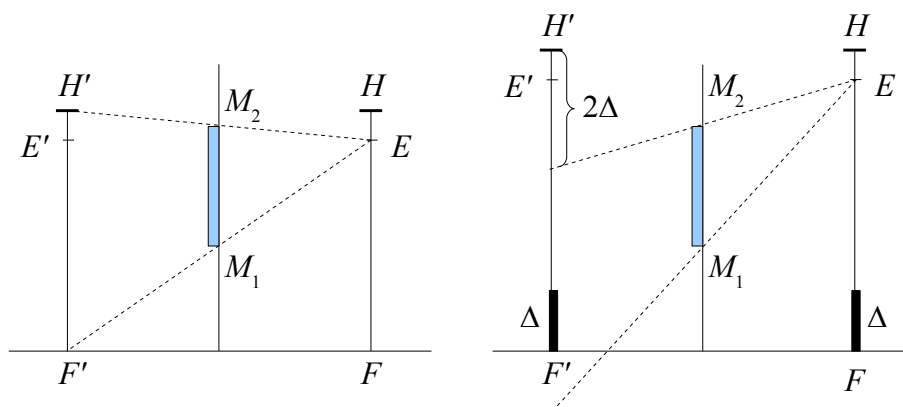
С учетом сделанных предположений получаем отношение периодов до и после катастрофы:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + 0.7 m_2}} = 1.1,$$

т. е. период изменился на 10%.

3. Если девушка рассматривает себя в зеркало без туфель и в туфлях, находясь на неизменном

расстоянии от него, то можно сделать следующие рисунки (слева – без туфель, справа – в туфлях):



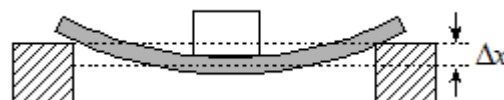
На рисунке Н – голова девушки, F – ее ноги, E – глаза, штрихованные величины относятся к изображению; M_1M_2 – зеркало, повешенное так, что без туфель девушка только-только видит себя в полный рост; Δ – высота каблуков.

Из рисунка видно, что когда девушка стоит перед зеркалом в туфлях на том же расстоянии, что и без туфель, то туфель она не видит, и ее макушка «режется» зеркалом на величину 2Δ , откуда

$$0.9h = h - 2\Delta \Rightarrow \Delta = 7.5 \text{ см.}$$

4. Коэффициент упругости доски можно определить из условия равновесия на ней неподвижного мальчика:

$$k \Delta x = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta x},$$



откуда собственная частота колебаний системы «мальчик на доске» равна

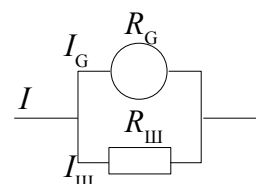
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta x}}.$$

Мальчик упадет с доски, если частота его шагов будет равна собственной частоте (в этом случае амплитуда колебаний будет максимальна). Тогда длина шага определится как

$$\frac{v}{l} = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow l = 2\pi v \sqrt{\frac{\Delta x}{g}} = 63 \text{ см.}$$

5. Для схемы, приведенной на рисунке имеем

$$I_G R_G = I_{III} R_{III} = (I - I_G) R_{III} \Rightarrow R_{III} = \frac{R_G}{I/I_G - 1} = 20 \text{ Ом.}$$



б (дополнительная)

Пусть W – мощность плитки. Тогда количество теплоты, необходимое для нагревания до температуры кипения, равно

$$Q_{\text{нагрев}} = W t_1 = c m \Delta T,$$

а количество теплоты, необходимое для выпаривания воды (уже находящейся при 100 °С), равно

$$Q_{\text{вып}} = W t_2 = r m.$$

Для времени t_2 получаем:

$$t_2 = t_1 \frac{Q_{\text{вып}}}{Q_{\text{нагрев}}} = t_1 \frac{r}{c \Delta T} = 67 \text{ мин.}$$