

## Олимпиада школьников «Высшая проба»

### *Решения и критерии проверки*

#### 8 класс

### **Задание 1. «Бронь столиков»**

Есть несколько возможных экономических объяснений повсеместного использования практики бронирования столиков.

#### *Основные причины:*

- Ресторан будет уверен, что клиент к нему придет – это страховка от того, что посетитель с улицы может не прийти.
- Данная опция дает преимущество при прочих равных (если клиент заранее выбирает между двумя схожими ресторанами, в одном из которых действует система бронирования, а в другом – нет).
- Если большая компания людей идет в ресторан, то он сможет заранее сдвинуть столы, чтобы она смогла разместиться. Если бы не было бронирования столиков, а ресторан был бы почти полон, то, возможно, компания решила бы уйти в другое место, так как невозможно было бы всех компактно разместить.
- Человек с улицы, вероятно, потратит меньше, чем тот, кто заказывает заранее. Люди часто бронируют столы для праздничных событий, поэтому готовы потратить больше, чем в обычное время.
- Данная опция позволяет улучшить впечатление о ресторане, что с большей вероятностью может привести к тому, что клиент будет возвращаться в него в будущем.
- Некоторые клиенты предпочитают конкретный столик, а эта опция даст им возможность забронировать его заранее. Поэтому клиент, возможно, будет приходить чаще, чем без нее.
- При бронировании ресторан имеет возможность собирать личные данные клиентов, чтобы делать персональные акции для увеличения числа посетителей.
- Некоторые популярные рестораны берут деньги за бронь, так как спрос на их услуги выше, чем пропускная способность ресторана. Таким образом, посетители платят за возможность попасть в ресторан.

#### *Дополнительные причины:*

- Рестораны берут деньги за бронь, что является дополнительным источником дохода.

*Комментарий:* без указания предпосылки о превышении спроса над вместимостью можно считать, что ресторан берет деньги за то, что кто-то мог бы сидеть за данным столиком, пока действует бронь. Однако ресторан мог бы ввести арендную плату за пользование столиком и получить те же деньги, если бы брони не было. Значит, бронь столиков в общем случае — это не совсем дополнительный доход.

- Данная мера позволяет предсказывать количество клиентов, чтобы закупать необходимое количество продуктов и чтобы знать, сколько персонала нужно в конкретный день.

*Комментарий:* ресторан может сделать предсказание на основе предыдущей статистики.

#### **Критерии проверки:**

- Для получения полного балла необходимо было подробно описать не менее трех основных причин.
- Полное и непротиворечивое описание первой основной причины – **9 баллов**.
- Последующие два рассуждения оцениваются по **8 баллов** каждое, если они полные.
- Дополнительные причины оценивались максимум в **4 балла**.

## Задание 2. «В отпуск на стройку»

Из условия следует, что если Николай решит обратиться в строительную фирму, то материалы обойдутся ему в  $120 \cdot \frac{2}{3} = 80$  тыс. рублей (и работа — в 40 тыс. рублей). Значит, если он будет строить забор самостоятельно, то потратит на материалы  $80 \cdot 0.75 = 60$  тыс. рублей. Однако за каждый день, когда Николай не будет ходить на работу, а будет строить забор, он недополучит 4 тыс. рублей. Значит, его издержки на самостоятельное строительство забора равны  $60 + 4X$  тыс. рублей, где  $X$  — количество дней, потраченных на поиск материалов и строительство. Издержки на строительство с помощью фирмы составляют 120 тыс. рублей. Необходимо, чтобы от самостоятельного строительства забора Николай получил положительную выгоду, то есть  $60 + 4X < 120$ , или  $X < 15$ . Значит, максимальное количество дней, которые Николай может потратить на постройку забора, равно 14.

### Критерии проверки:

- Посчитано, сколько стоят материалы и работа в стоительной фирме — **8 баллов** (по **4 балла** за каждое значение).
- Определены издержки в каждом из случаев — **6 баллов** (по **3 балла** за каждый случай).
- Высказана идея сравнения издержек в двух случаях — **3 балла**.
- Решено полученное неравенство ( $X < 15$ ) или найдено  $X = 15$ , если решение подразумевает поиск  $X$ , при котором безразлично, кто будет строить — **3 балла**.
- Объяснено, почему нужно взять  $X = 14$  — **5 баллов**.
- За арифметическую ошибку снималось **3 балла**.
- Решения, в которых считалось, что Николай зарабатывает на строительство забора, получали **не более 8 баллов**.

### Задание 3. «Опрос»

а) Если выбирать только из предложенных методов, то первый (опросить по телефону 500 случайно выбранных жителей города) представляется наиболее удачным для определения средних расходов по городу. Благодаря закону больших чисел, средний результат по случайной выборке с большой вероятностью будет близок к искомому среднему результату по всему городу.

Во втором варианте (опросить 300 жителей Спального района, 150 жителей Центра и 50 жителей Частного сектора) используется смещённая выборка: доля опрошенных по каждому из районов (от числа всех опрошенных) не соответствует доле жителей, проживающих в этом районе (от числа всех жителей в городе). Например, в Частном секторе проживает  $2/(100 + 10 + 2) \approx 1.7\%$  от всех жителей города, но среди опрошенных их будет  $50/(300 + 150 + 50) = 10\%$  (от всех опрошенных). Если в разных районах расходы на пирожные существенно различаются (а этого разумно ожидать, поскольку в указанных районах скорее всего живут люди с разным социально-экономическим статусом), это приведёт к тому, что среднее по такой выборке не будет равняться среднему по всему городу. Например, если предположить, что в Центре расходы на пирожные на одного человека в среднем составляют 5 тыс. рублей в месяц, в Спальном районе 2 тыс. рублей в месяц и в Частном секторе 10 тыс. рублей в месяц, то средние расходы по городу составят

$$5 \cdot \frac{10000}{112000} + 2 \cdot \frac{100000}{112000} + 10 \cdot \frac{2000}{112000} \approx 2,41 \text{ тыс. руб./мес.},$$

а по нашей выборке средние расходы будут равны

$$5 \cdot \frac{300}{500} + 2 \cdot \frac{150}{500} + 10 \cdot \frac{50}{500} = 4,6 \text{ тыс. руб./мес.}$$

Такое расхождение в результатах свидетельствует о некачественности опроса при использовании второго метода. В силу того, что качество является первым приоритетом, мы не можем использовать этот метод.

Наконец, в третьем варианте (разместить опрос на популярной в N-ске странице в социальной сети) проголосуют только посетители этой страницы. Ясно, что эта выборка вероятнее всего не будет хорошей моделью населения города. Она будет заведомо смещена в сторону молодежи (представить себе пенсионера, не имеющего учетной записи в социальной сети, гораздо проще, чем не пользующегося ей студента). Помимо этого, хотя доступ к интернету сегодня есть почти у всех, он положительно связан с доходом (то есть самые бедные с меньшей вероятностью проголосуют в опросе). Исправить этот недостаток, перевзвесив результаты, весьма сложно, поскольку при проведении опроса онлайн становится затруднительным определение социально-демографических характеристик респондентов (не у всех будут указаны даже место проживания и возраст и неясно, насколько достоверно они будут указаны у остальных). Таким образом, этот метод также нельзя рекомендовать.

Если выйти за рамки предложенных методов, то можно предложить модификацию второго: либо скорректировать квоту по каждому району, так, чтобы она соответствовала доле жителей этого района во всём городе (то есть опросить 446 человек из Спального района, 45 человек из Центра и 9 человек из Частного сектора),

либо использовать исходную выборку, но скорректировать результат, посчитав отдельно средние по каждому из районов, а затем сложив их с весами, равными доле населения соответствующего района во всём городе: то есть результат по Спальному району умножить на  $100/112 \approx 0,89$ , результат по Частному сектору умножить на  $2/112 \approx 0,02$  и результат по Центру умножить на  $10/112 \approx 0,09$ , и всё сложить. Такой подход может дать даже лучший результат (имеющий меньшую дисперсию, то есть менее зависящий от случайности), чем первый из предложенных методов, при условии, что в разных районах расходы на пирожные различаются сильно.

**Ответ:** первый метод (или модифицированный второй).

б) Если нас интересует среднее по каждому из районов, то оптимальным является второй подход. Как обсуждалось выше, третий подход скорее всего даст искажённую информацию, которую к тому же будет сложно соотнести с местом проживания. Первый подход в этом случае не оптимален: он больше подвержен случайности — например, может так случиться, что в результате случайного выбора наберётся совсем мало респондентов из Частного сектора. В этом случае данные по этому району будут очень ненадежны (вдруг нам случайно попадётся один человек и он окажется большим сладкоежкой?).

**Ответ:** второй метод.

### Критерии проверки:

#### Пункт а)

Максимум: 12 баллов.

1. Ответ 1 («Случайная выборка»).

(а) При полном обосновании: **12 баллов**. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие.

(б) Если исключен только один вариант: **7 баллов**.

2. Ответ 2 («Выборка по районам»).

Строго говоря, это неверный ответ: результат может быть сильно смещён, поскольку квоты по районам не соответствуют числу жителей в районах, а районы явно разные по социально-демографическим характеристикам. Тем не менее, можно предложить разумные доводы в пользу этого варианта или даже сделать из него верный (но это требует дополнительных соображений), см. ниже.

(а) Идея о необходимости представительности всех районов (это уменьшает дисперсию, если считать, что районы сильно разные между собой и при этом однородные — представьте себе, что у вас есть три одинаковых по числу жителей, но сильно разных, района, и вы хотите опросить ровно трёх жителей — тогда их лучше выбирать по одному из района, чем случайно по городу): **3-4 балла** (в зависимости от подробности обоснования).

(б) Если дополнительно к предыдущему пункту предъявлено рассуждение о том, что можно получить правильный результат о среднем по городу, правильно взвесив результаты: **12 баллов**.

3. Ответ «Опрос в соц. сети».

Это неверный ответ. Обычно **0 баллов** (см. также раздел «Отдельные соображения» ниже)

### Пункт б)

Максимум: 13 баллов

1. Ответ 1 («Случайная выборка»).

Это неверный ответ, однако если при его обсуждении приведены какие-то разумные соображения, за них могут быть назначены **3-4 балла** (см. раздел «Отдельные соображения» ниже)

2. Ответ 2 («Выборка по районам»).

(а) При полном обосновании: **13 баллов**. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие. Если исключён только один из двух других вариантов, то ставится **7 баллов**.

(б) Штраф в **6 баллов**, если обоснование состоит в том, что вариант 1 не подходит, потому что при случайном обзвоне мы не знаем, из какого района человек: на самом деле в условии сказано, что база содержит адреса.

3. Ответ 3 («Опрос в соц. сети»).

Это неверный ответ, он обычно получает **0 баллов**.

### Отдельные соображения

1. Только ответ без каких-либо объяснений: **0 баллов** (за любой пункт).

2. Проводить опрос в социальных сетях дешево: **4 балла**.

3. В социальных сетях представлены все, поэтому выборка будет репрезентативной: **1 балл**.

4. Мелкие ошибки в рассуждениях или не слишком существенная невнимательность влечёт штраф в **2 балла**.

5. Предложен новый метод, не описанный в условии, но не противоречащий условию. При достаточном обосновании он может быть оценен по аналогии с альтернативами, перечисленными в условии, вплоть до выставления полного балла.

6. Различные разумные соображения по ходу решения, не являющиеся решением, могут быть оценены, но не более чем в **4 балла**.

#### Задание 4. «Гильдия гончаров»

Средние и предельные издержки производства одного горшка равны сумме затрат на материал, подмастерье и налог, то есть  $12 + 5 + 3 = 20$  грошам (**+5 баллов**). Из текста задачи следует, что спрос на горшки имеет следующий вид:  $Q = 80 - P$  (**+7 баллов**). Тогда прибыль гильдии  $\pi$  равна

$$\pi = (P - AC)Q = (P - 20)(80 - P) = -P^2 + 100P - 1600$$

(**+7 баллов**). Максимального значения прибыль достигает при цене  $P = \frac{-100}{-2} = 50$  (вершина параболы с ветвями вниз), этой цене соответствует объем продаж  $Q = 30$  (**+6 баллов**).

#### Альтернативное решение

Аналогично издержки на производство одного горшка равны  $12 + 5 + 3 = 20$  грошей (**+5 баллов**). Спрос и предложение можно представить через параметр  $a$ . Тогда из условия задачи  $P = 79 - a$ ,  $Q = 1 + a$  (**+4 балла**). Прибыль  $\pi$  можно выразить через параметр  $a$  (**+3 балла**):

$$\pi = (79 - a)(1 + a) - 20(1 + a) = (59 - a)(1 + a) = 59 + 58a - a^2$$

(**+7 баллов**).

Максимум прибыли достигается в вершине параболы, так как ее ветви направлены вниз:  $a = \frac{-58}{-2} = 29$  (**+3 балла**). Тогда  $P = 79 - 29 = 50$  (**+3 балла**).

#### Критерии проверки:

- Нахождение значения средних издержек на производство одного горшка — **5 баллов**. Если не описывалось, как получено число 20, то ставилось **4 балла**. Если число 20 не было нигде получено как издержки, но корректно фигурировало в вычислениях, то ставилось **3 балла**.
- Вывод функции спроса на горшки — **7 баллов**. Если задача решалась через параметр  $a$ , то выписывание формул для цены и количества оценивалось в **4 балла**, а за идею о выписывании функции прибыли через  $a$  давалось еще **3 балла**.
- Вывод функции прибыли гильдии (как через  $P$ , так и через  $a$ ) — **7 баллов**.
- Расчет равновесной цены горшка — **6 баллов**. В случае, если задача решалась через параметр  $a$ , то за нахождение значения параметра ставилось **3 балла**, а за саму цену — еще **3 балла**. Если цена была получена перебором, то можно было получить до **3 баллов** в зависимости от логики и от полноты перебора.