Олимпиада школьников «Высшая проба»

Решения и критерии проверки

11 класс

Задание 1. «Ягодный король»

а) **(10 баллов)** Найдем рыночную функцию предложения труда. При зарплате ниже 5 не готов работать никто, при зарплате от 5 до 10 — только мигранты. При зарплате больше 10 объем предложения труда равен $12 + (w - 10) = w + 2$. Обратная функция рыночного предложения труда имеет вид

$$w_s(L) = \begin{cases} 5, & 0 < L \leqslant 12; \\ L - 2, & L > 12. \end{cases}$$

Таким образом, функция прибыли имеет вид

$$\pi(L) = (20 - w_s(L))L = \begin{cases} 15L, & 0 < L \leqslant 12; \\ 22L - L^2, & L > 12. \end{cases}$$

Очевидно, что при $L \leq 12$ функция прибыли возрастает. Вершиной параболы $22L - L^2$ (ветви направлены вниз) является $L = 11$. Получаем, что эта функция убывает при $L > 11$, а значит, и при всех $L > 12$. Таким образом, функция прибыли возрастает при $L \leqslant 12$ и убывает при $L > 12$.

Следует обратить внимание, что функция прибыли терпит разрыв при $L = 12$, поэтому из того, что функция прибыли возрастает при $L \leqslant 12$ и убывает при $L > 12$, еще не следует, что оптимальным является $L = 12$. Однако легко увидеть (и это очевидно из экономических соображений), что значение функции прибыли при переходе через $L = 12$ «прыгает» вниз, а не вверх, и потому точка максимума существует и равна 12.

Следовательно, оптимальным является $L = 12$, фирма наймет только мигрантов и будет платить им зарплату $w = 5$.

(б) **(6 баллов)** Обозначим количество нанятых местных работников за L_1, а мигрантов за L_2. Фирма максимизирует прибыль $(20-5)L_2+(20-L_1-10)L_1$ при условии $L_2 \leq 12$. Эта функция равна сумме двух слагаемых, каждое из которых зависит от разных независимых переменных, и поэтому слагаемые можно максимизировать по отдельности. Первая часть представляет собой возрастающую линейную функцию, вторая — квадратичная функция, график которой представлен параболой, ветви которой направлены вниз. Отсюда получаем, что $L_1 = 5$, $L_2 = 12$. Зарплата местных работников будет равна $L_1 + 10 = 15$, а мигрантов — 5.

(в) **(4 балла)** Положение мигрантов не изменится, поскольку их заработная плата и количество нанятых не меняется. Местным работникам станет строго лучше, так как, в отличие от предыдущего пункта, местные работники оказываются нанятыми и четверо из них получают бо́льшую заработную плату, чем та минимальная зарплата, за которую они готовы были работать. Прибыль фирмы тоже строго выросла в пункте б) по сравнению с пунктом а): она была равна $(20-5)\cdot 12$, а стала равна $(20-5)\cdot 12+(20-5-10)\cdot 5$. Таким образом, в данном случае возможность дискриминировать разных работников по зарплате приводит к тому, что никому не становится хуже, а кому-то (местным работникам и фирме) становится строго лучше.

Примечание 1: то, что фирме не может стать хуже в пункте б) по сравнению с пунктом а), очевидно и без расчетов, так как в пункте б) она всегда может принять то же решение, что и в пункте а).

Примечание 2: изменение, при котором никому не становится хуже, и хотя бы кому-то становится строго лучше, экономисты называют Парето-улучшением. Этот пример показывает, что отмена запрета на дискриминацию может в некоторых случаях (хотя, конечно, далеко не всегда) приводить к Парето-улучшению.

Критерии проверки:

Пункт а): всего **10 баллов**

- Верно и полностью обосновано, что не следует нанимать местных работников — **6 баллов**. Если при обосновании точки максимума $L=12$ не учтен разрыв в этой точке, то в остальном верное обоснование этой части оценивалось в **3 балла**.
- Если факт того, что не будут наняты местные работники, был установлен неполным перебором, то оценка за пункт **снижалась на 2 балла**.
- Верно обосновано, что следует нанимать всех мигрантов, а также верно найдены заработная плата и прибыль фирмы — **4 балла**.
- За отсутствие аргументов о том, что найденная функция в найденной точке имеет максимум, а не минимум значения (и наоборот) оценка **снижалась на 1 балл**.
- За арифметическую ошибку оценка **снижалась на 1 балл**.

Пункт б): всего **6 баллов**

- Верно обосновано, что следует нанимать всех мигрантов при заработной плате 5 – **1 балл**.
- Верно обосновано, что следует нанимать 5 местных работников при зарплате 15 – **5 баллов**.
- За отсутствие аргументов о том, что найденная функция в найденной точке имеет максимум, а не минимум значения (и наоборот) оценка **снижалась на 1 балл**.

- За арифметическую ошибку оценка **снижалась на 1 балл**.

Пункт в): всего **4 балла**

- Верно аргументировано, почему мигрантам не станет хуже – **1 балл**.
- Верно аргументировано, почему местным работникам не станет хуже – **1 балл**.
- Верно найдена прибыль фирмы в условиях пункта б) и аргументировано, почему фирме не станет хуже — **2 балла**.
- За арифметическую ошибку оценка **снижалась на 1 балл**.

Задание 2. «Без паники»

Выбор вкладчиком банка, как правило, основывается на нескольких критериях, главными из которых являются установленные банком ставки по депозитам и степень надежности банка. Поскольку Агентство по страхованию вкладов (АСВ) гарантирует возврат вкладов в размере до 1,4 миллиона рублей в случае, если банк не сможет отвечать по своим обязательствам, многие некрупные вкладчики игнорируют критерий надежности и выбирают банки с самым высоким уровнем ставок по депозитам **(+3 балла)**. Более высокий уровень ставок может свидетельствовать либо о том, что у банка уже есть проблемы и ему нужно срочно привлечь ликвидность, либо о том, что банк ведет рискованную инвестиционную политику. Банки с рискованными инвестиционными стратегиями могут позволить себе больший уровень выплат процентов в случае, если стратегия оказывается успешной. Однако для рискованных стратегий выше вероятность реализации неудачных событий, которые чреваты нарушением финансовой стабильности банка **(+2 балла)**.

Устойчивость банковской системы определяется способностью банков исполнять свои обязательства под воздействием различных негативных шоков. Колебания курсов валют, важные политические события, отзывы лицензий у банков могут формировать пессимистичные ожидания вкладчиков относительно сохранности депозитов. В случае, если достаточно большое число вкладчиков одновременно решит досрочно забрать свои средства из банка, банку не хватит ликвидности для исполнения этих требований. Это может повлечь отзыв лицензии банка. Банки, использующие рискованные стратегии инвестирования, сталкиваются с большей вероятностью негативных шоков **(+3 балла)**.

Возможный отказ со стороны АСВ от полной компенсации вкладов или отказ от страхования процентов приведет к тому, что вкладчики при выборе банка начнут принимать во внимание его надежность. Тогда большее число вкладов будет сделано в устойчивые банки, консервативно распоряжающиеся средствами вкладчиков, что положительным образом скажется на устойчивости банковской системы в целом **(+6 баллов)**.

Дифференциация банковских взносов в АСВ в зависимости от уровня процентных ставок по депозитам делает рискованные стратегии менее прибыльными. Меньшее число банков будут выбирать такие стратегии, что повысит устойчивость банковской системы **(+6 баллов)**.

Критерии проверки:

- Описание факторов выбора вкладчиками банка – **3 балла**.
- Упоминание связи доходности по депозиту и рискованности стратегий банка – **2 балла**.
- Описание механизма банковской паники – **3 балла**.

- Влияние неполного страхования вкладов и отказа от страхования процентов на выбор вкладчиками более надежных банков – **6 баллов**. Если эта идея указывалась в связи только с одной из двух мер, то за это ставилось **4 балла**.
- Дифференцированные взносы в АСВ стимулируют банки использовать менее рискованные стратегии – **6 баллов**.

Задание 3. «Опрос»

а) Если выбирать только из предложенных методов, то первый (опросить по телефону 500 случайно выбранных жителей города) представляется наиболее удачным для определения средних расходов по городу. Благодаря закону больших чисел, средний результат по случайной выборке с большой вероятностью будет близок к искомому среднему результату по всему городу.

Во втором варианте (опросить 300 жителей Спального района, 150 жителей Центра и 50 жителей Частного сектора) используется смещённая выборка: доля опрошенных по каждому из районов (от числа всех опрошенных) не соответствует доле жителей, проживающих в этом районе (от числа всех жителей в городе). Например, в Частном секторе проживает $2/(100+10+2) \approx 1{,}7\%$ от всех жителей города, но среди опрошенных их будет $50/(300+150+50) = 10\%$ (от всех опрошенных). Если в разных районах расходы на пирожные существенно различаются (а этого разумно ожидать, поскольку в указанных районах скорее всего живут люди с разным социально-экономическим статусом), это приведёт к тому, что среднее по такой выборке не будет равняться среднему по всему городу. Например, если предположить, что в Центре расходы на пирожные на одного человека в среднем составляют 5 тыс. рублей в месяц, в Спальном районе 2 тыс. рублей в месяц и в Частном секторе 10 тыс. рублей в месяц, то средние расходы по городу составят

$$5 \cdot \frac{10000}{112000} + 2 \cdot \frac{100000}{112000} + 10 \cdot \frac{2000}{112000} \approx 2{,}41 \text{ тыс. руб./мес.},$$

а средние расходы по нашей выборке:

$$5 \cdot \frac{300}{500} + 2 \cdot \frac{150}{500} + 10 \cdot \frac{50}{500} = 4{,}6 \text{ тыс. руб./мес.}$$

Такое расхождение в результатах свидетельствует о некачественности опроса при использовании второго метода. В силу того, что качество является первым приоритетом, мы не можем использовать этот метод.

Наконец, в третьем варианте (отправить студентов в 10 самых населённых домов) выборка также будет смещена: 10 самых населённых домов скорее всего находятся в Спальном районе (именно там находятся многоэтажки) и результат вообще не будет учитывать потребление пирожных в других районах (которое может существенно отличаться от потребления в Спальном районе). Таким образом, этот метод также нельзя рекомендовать.

Если выйти за рамких предложенных методов, то можно предложить модификацию второго: либо скорректировать квоту по каждому району так, чтобы она соответствовала доле жителей этого района во всём городе (то есть опросить 446 человек из Спального района, 45 человек из Центра и 9 человек из Частного сектора), либо использовать исходную выборку, но скорректировать результат, посчитав отдельно средние по каждому из районов, а затем сложив их с весами, равными доле населения соответствующего района во всём городе: то есть результат по Спальному району умножить на $100/112 \approx 0{,}89$, результат по Частному сектору умножить на $2/112 \approx 0{,}02$ и результат по Центру умножить на $10/112 \approx 0{,}09$, и всё сложить.

Такой подход может дать даже лучший результат (имеющий меньшую дисперсию, то есть менее зависящий от случайности), чем первый из предложенных методов, при условии, что в разных районах расходы на пирожные различаются сильно.

Ответ: первый метод (или модифицированный второй).

б) Если нас интересует среднее по каждому из районов, то оптимальным является второй подход. Как обсуждалось выше, третий подход скорее всего даст информацию только по одному району и поэтому заведомо не подходит. Первый подход в этом случае не оптимален: он больше подвержен случайности — например, может так случиться, что в результате случайного выбора наберётся совсем мало респондентов из Частно сектора и в этом случае данные по этому району будут очень ненадежны (вдруг нам случайно попадётся один человек и он окажется большим сладкоежкой?).

Ответ: второй метод.

Критерии проверки:

Пункт а)

Максимум: 10 баллов.

1. Ответ 1 («Случайная выборка»).
   (a) При полном обосновании: **10 баллов**. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие.
   (b) Если исключен только один вариант (например, вариант 3 на основании того, что в этом случае студенты пойдут только в спальный район и не получится полной картины): **4 балла**.

2. Ответ 2 («Выборка по районам»).

   Строго говоря, это неверный ответ: результат может быть сильно смещён, поскольку квоты по районам не соответствует числу жителей в районах, а районы явно разные по социально-демографическим характеристикам. Тем не менее, можно предложить разумные доводы в пользу этого варианта или даже сделать из него верный (но это требует дополнительных соображений, см. ниже).

   (a) Идея о необходимости представительности всех районов (это уменьшает дисперсию, если считать, что районы сильно разные между собой и при этом однородные. Представьте, что у вас есть три одинаковых по числу жителей, но сильно разных района, и вы хотите опросить ровно трёх жителей — тогда их лучше выбирать по одному из района, чем случайно по городу): **2-3 балла** (в зависимости от подробности обоснования).
   (b) Если дополнительно к предыдущему пункту предъявлено рассуждение о том, что можно получить правильно результат о среднем по городу, правильно взвесив результаты: **10 баллов**.

3. Ответ 3 («Отправить студентов»).

   Это неверный ответ. Обычно **0 баллов** (см. также раздел «Отдельные соображения» ниже).

Пункт б)

Максимум: 10 баллов

1. Ответ 1 («Случайная выборка»).

   Это неверный ответ, однако если при его обсуждении приведены какие-то разумные соображения, за них могут быть назначены **2-3 балла** (см. раздел «Отдельные соображения» ниже)

2. Ответ 2 («Выборка по районам»).

   (a) При полном обосновании: **10 баллов**. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие. Если исключён только один из двух других вариантов, то ставится **4 балла**.

   (b) Штраф в **5 баллов**, если обоснование состоит в том, что вариант 1 не подходит, потому что при случайном обзвоне мы не знаем, из какого района человек: на самом деле в условии сказано, что база содержит адреса.

3. Ответ 3 («Отправить студентов»).

   Это неверный ответ, он обычно получает **0 баллов**.

Отдельные соображения

1. Только ответ без каких-либо объяснений: **0 баллов** (за любой пункт).

2. Рассуждение о том, что спальный район самый большой и поэтому среднее по спальному близко к среднему по всему городу: **2 балла**.

3. Сравнение стоимости рабочего времени Васи и студентов (при условии, что это рассуждение становилось основой для принятия решения об использовании или отбрасывании соответствующего метода): **2 балла** (но если это рассуждение повторяется в обоих пунктах, то всё равно ставилось 2 балла, они не суммировались).

4. Исключение третьего метода только на основании его дороговизны: **1 балл**.

5. Мелкие ошибки в рассуждениях или не слишком существенная невнимательность влечёт штраф в **2 балла**.

6. Предложен новый метод, не описанный в условии, но не противоречащий условию. При достаточном обосновании он может быть оценен аналогично альтернативами, перечисленными в условии, вплоть до выставления полного балла.

7. Различные разумные соображения по ходу решения, не являющиеся решением, могут быть оценены в **1-2 балла**.

Задание 4. «Борьба за скидку»

а) Допустим, Даня назначил цену p. Найдем оптимальное действие Аристарха. Если он будет торговаться, его полезность будет равна $v-(p-x)-x^2/p$. Относительно x эта функция квадратичная, и ее графиком является парабола с ветвями вниз. Оптимальное значение x находится в вершине параболы: $x^\star = p/2$. При этом максимальная полезность Аристарха равна $v-(p-p/2)-p/4 = v-3p/4$. Она неотрицательна при $p \leqslant 4v/3$.

Таким образом, при $p \leqslant 4v/3$ Аристарх будет торговаться и добиваться скидки $p/2$, а при $p > 4v/3$ откажется от покупки товара. В первом случае полезность Дани будет равна $p-p/2 = p/2$ (возрастающая функция), а во втором — нулю. Таким образом, оптимальной для Дани является наибольшая цена p, при которой Аристарх не откажется сразу же, то есть $p = 4v/3$. При этом Аристарх добьется скидки $x = 2v/3$.

б) В этом случае оптимальное поведение Аристарха не меняется, и поэтому полезность Дани при назначении цены $p \leqslant 4v/3$ будет равна

$$p - x - \alpha x = p - p/2 - \alpha p/2 = p(1-\alpha)/2.$$

Таким образом, Даня будет пытаться продать товар при $\alpha \leqslant 1$.

Ответ: а) $p = 4v/3$; $x = 2v/3$. б) При $\alpha \leqslant 1$.

Критерии проверки:

Пункт а) — всего 15 баллов:

- Понимание, что задачу нужно решать с конца (сначала искать оптимальное действие Аристарха, а потом — Дани *с учетом* найденного ответа Аристарха) — **3 балла**.
- Решение задачи Аристарха — **6 баллов**. Из них:
  - **3 балла** за максимизацию параболы и поиск $x^\star = p/2$.
  - **3 балла** за учет ограничения $p \leqslant 4v/3$.
- Решение задачи Дани — **6 баллов**. Из них:
  - **1 балл** за учет возможности отсутствия сделки (полезность равна 0).
  - **2 балла** за корректную запись целевой функции Дани с учетом оптимального ответа Аристарха ($p/2$). (Если не показано, как получена целевая функция, то **снимается 1 балл**.)
  - **3 балла** за ответ «Даня поставит максимальную цену, при которой сделка может состояться».

Пункт б) — всего 5 баллов:

- За корректную новую целевую функцию Дани с учетом ответа Аристарха — **3 балла**.
- За ответ — **2 балла**.

Возможные штрафы пункта б):

- **2 балла снимается**, если целевая функция Дани выписана без объяснения;
- **1 балл снимается**, если в результате неверного решения пункта (а) оптимальный ответ Аристарха не равен $x^{\star} = p/2$, но остальное сделано верно;
- **1 балл снимается**, если ответ получен с арифметической ошибкой, но логика решения верная.

Задание 5. «Денежная эмиссия и реакция профсоюза»

Найдем совокупное предложение. «Фирма», которой является экономика, максимизирует прибыль — функцию $\pi(L) = P \cdot 16\sqrt{L} - wL$. Взяв производную, получаем

$$\pi' = \frac{8P}{\sqrt{L}} - w.$$

Если приравнять производную к нулю, получим

$$L^\star = \frac{64P^2}{w^2},$$

уравнение спроса на труд. Можно убедиться, что при $L = L^\star$ производная меняет знак с положительного на отрицательный, то есть мы имеем максимум.

Примечание. Возможны и другие способы нахождения критической точки и проверки на максимум. Так, можно заметить, что целевая функция является параболой с ветвями вниз относительно $\sqrt{L}$, воспользоваться условием $MRP_L = w$, а также найти знак второй производной и убедиться, что он отрицательный.

Подставляя спрос на труд в производственную функцию, получаем уравнение AS:

$$Y = 128\frac{P}{w}.$$

Воспользовавшись уравнением количественной теории денег с учетом $V = 1$, получим кривую совокупного спроса:

$$Y = \frac{M}{P}.$$

Найдем равновесие на товарном рынке, приравняв AD и AS:

$$128\frac{P}{w} = \frac{M}{P},$$

откуда равновесный уровень цен

$$P = \frac{\sqrt{w \cdot M}}{8\sqrt{2}}.$$

Из условия следует, что после вмешательства $w = 2 \cdot (1+m)^\alpha$, а $M = 100 + 100m$. С учетом этого можно уточнить целевую функцию государства:

$$\frac{\Delta M}{P_1} = \frac{100m}{\sqrt{w \cdot M}/(8\sqrt{2})} = \frac{100m \cdot 8\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot (1+m)^\alpha \cdot (100+100m)}} = \frac{80m}{(1+m)^{(\alpha+1)/2}}.$$

Производная этого выражения по m равна

$$\left(\frac{\Delta M}{P_1}\right)' = \frac{80 \cdot (1+m)^{(\alpha+1)/2} - \frac{\alpha+1}{2}(1+m)^{(\alpha-1)/2} \cdot 80m}{(1+m)^{\alpha+1}}.$$

Знаменатель этой дроби положительный, так что он не будет влиять на знак производной, то же можно сказать и про множитель 80 в числителе. После упрощения получаем, что производная равна нулю при

$$(1+m)^{(\alpha-1)/2}\left(1+\frac{1-\alpha}{2}m\right)=0.$$

Первый множитель всюду положителен, так что он не будут влиять на знак производной. Поэтому производная равна нулю в точке

$$m^{\star}=\frac{2}{\alpha-1},$$

в которой она меняет знак с положительного на отрицательный (в силу $\alpha>1$). Таким образом, мы имеем максимум.

Видно, что оптимальное для государства увеличение денежной массы *убывает* по α. Почему это происходит? Чем больше сила профсоюза, тем сильнее растет номинальная зарплата, а значит, сильнее растут издержки фирм и сокращается совокупное предложение при том же уровне m. А значит, чем больше α, тем сильнее при увеличении денежной массы будут расти цены. Учитывая этот эффект, государству не следует сильно повышать денежную массу, если α велико, поскольку оно максимизирует эмиссию *в реальном выражении* $\Delta M/P_1$.

Критерии проверки:

Решение задачи предполагает четыре шага:

1. Вывод уравнения кривой AS (постановка оптимизационной задачи, решение, проверка достаточного условия, получение функции AS) — **6 баллов**.

2. Нахождение равновесного уровня цен путём приравнивания AD и AS (уравнение $AD=AS$, из которого получен уровень цен) — **3 балла**. Если участник только ищет первоначальное равновесие с параметрами до эмиссии, то это оценивается в **1 балл**.

3. Максимизация целевой функции государства и получение ответа (постановка оптимизационной задачи, решение, проверка достаточного условия, получение нужной зависимости) — **7 баллов**.

4. Экономическая интерпретация ответа — **4 балла**.

Политика относительно штрафов:

- **по 2 балла снимается**, если на 2-м или 4-м этапах решения не проверено достаточное условие (не показано, что найденная критическая точка является именно точкой максимума);

- штрафы за арифметические ошибки определяются серьезностью этих ошибок; если качественного изменения ответа не происходит и задача из-за ошибки не упрощается, то штраф составляет **2 балла**, а последующие вычисления проверяются с учетом ошибки.