Олимпиада для студентов и выпускников вузов по направлению
«Математика»

Профили:
«Mathematics»
«Математическая физика»

Время выполения задания — 240 минут

Каждая из задач оценивается из 20 баллов, если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам.
Each problem costs 20 points, if the sum exceeds 100, the result is equal to 100 points.

Замечение о критериях

Ниже приведены критерии, соответствующие типичным случаям. По каждой задаче было 2-3 работы, не подходящие ни под один критерий (скажем, в работе сделана уникальная мелкая ошибка). В этом случае решение о количестве баллов принималось, глядя на наиболее близкие критериальные случаи.

I. Общая часть / COMMON PART

Решения задач в этой части можно записывать по-русски или по-английски.
Solutions of the problems in this section should be written in Russian or English.

Задача 1. В игру играет один игрок. Он бросает игральную кость (кубик с числами от 1 до 6 на гранях) пять раз. Игрок выигрывает, если все выпавшие числа не меньше 4, а их сумма не меньше 25. Найдите вероятность выигрыша, если выпадение каждой из граней кубика происходит с вероятностью 1/6.

Решение. Есть следующие наборы из 5 чисел от 4 до 6, дающие в сумме не менее 25:

- все числа не менее 5 (всего $2^5 = 32$ варианта).
- одна четвёрка, не менее одной шестёрки (всего $5 \times (2^4 - 1) = 5 \times 15 = 75$ вариантов).
- две четвёрки, не менее двух шестёрок (всего $\frac{5\times 4}{2} \times (1+3) = 40$ вариантов).

Итого получается $32 + 75 + 40 = 147$ благоприятных исходов. Всего исходов 6^5, поэтому ответ в задаче $\frac{147}{6^5} = \frac{49}{2592}$. □

Критерии

20 баллов Верный ответ (достаточно в виде $\frac{147}{6^5}$), полученный из верных соображений.

15 баллов При перечислении вариантов сделаны небольшие ошибки: например, забыт 1–2 варианта или вписано несколько вариантов с числами, большими 6.

10 баллов Некритериальный случай, в котором мы решили, что это хуже, чем 15 (см. выше), но лучше, чем 5 (см. ниже).

5 баллов Решение, считающее каждый неупорядоченный набор чисел только один раз.

Задача 2. Обозначим символами $x_1, x_2, \dots, x_5$ корни полинома

$$F(x) = x^5 + 2x^3 + px^2 + qx + r,$$

где p, q и r — заданные вещественные числа.

a) Докажите, что при любых вещественных p, q и r многочлен F имеет комплексные невещественные корни.

b) Найдите значение выражения

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4.$$

Решение. Согласно теореме Виета, коэффициент многочлена $F(x)$ при степени x^{5-k} представляет собой элементарную симметрическую функцию σ_k от корней многочлена со знаковым множителем $(-1)^k$:

$$F(x) = x^5 - \sigma_1 x^4 + \sigma_2 x^3 - \sigma_3 x^2 + \sigma_4 x - \sigma_5.$$

Учитывая явный вид многочлена $F(x)$ получаем набор равенств:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_i x_i && = 0 \\
\sigma_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j && = 2 \\
\sigma_3 &= \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k && = -p \\
\sigma_4 &= \sum_{i<j<k<l} x_i x_j x_k x_l && = q \\
\sigma_5 &= x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 && = -r
\end{aligned}$$

Введём также обозначение

$$s_k = \sum_i x_i^k.$$

a) Для доказательства наличия корней с ненулевой мнимой частью, возведём в квадрат величину σ_1, которая в нашем случае равна нулю:

$$0 = \sigma_1^2 = s_2 + 2\sigma_2 = s_2 + 4.$$

Таким образом, сумма квадратов корней равна $s_2 = -4$, и корни x_i не могут быть все вещественны.

Второй способ рассуждений — доказательство от противного. Допустим, что все 5 корней многочлена F — вещественные числа. По теореме Ролля, между двумя двумя вещественными корнями многочлена обязательно лежит вещественный корень его производной, а кратный корень кратности d является корнем кратности $d-1$ для производной. Поэтому производная F' имеет не менее 4 вещественных корней с учётом кратности. Следовательно, все корни производной вещественны. Аналогично, все корни второв производной и все корни третьей производной тоже вещественны. Но $F'''(x) = 60x^2 + 12$, и этот многочлен не имеет вещественных корней. Полученное противоречие доказывает неверность исходного предположения о вещественности всех пяти корней многочлена F.

b) Наша задача найти значение s_4. Для этого можно воспользоваться тождествами Ньютона, выражающими степенные суммы s_k через элементарные симметрические функции σ_k:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 - s_1 &= 0\\
2\sigma_2 - \sigma_1 s_1 + s_2 &= 0\\
3\sigma_3 - \sigma_2 s_1 + \sigma_1 s_2 - s_3 &= 0\\
4\sigma_4 - \sigma_3 s_1 + \sigma_2 s_2 - \sigma_1 s_3 + s_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Поскольку по условию $\sigma_1 = 0$, то получаем следующие ответы для степенных сумм:

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = -4, \qquad s_3 = -3p, \qquad s_4 = -4\sigma_4 - \sigma_2 s_2 = 8 - 4q.$$

Ответ можно получить и прямыми выкладками, преобразуя четвертую степень суммы корней $(x_1 + ... x_5)^4 = 0$.

Ответ: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 = 8 - 4q$.

□

Критерии п. а)

10 баллов Правильный ответ, полученный корректными рассуждениями.

8 баллов Произведена оценка суммы квадратов корней с арифметическими ошибками, не влияющими на вывод об отрицательности результата.

0 баллов Сумма квадратов корней найдена в решении п. б), для п. а) не использована.

Критерии п. b)

10 баллов Правильный ответ, полученный корректными рассуждениями.

8 баллов Произведена оценка суммы четвертых степеней корней с незначительными арифметическими ошибками.

5 баллов При раскрытии скобок потеряна часть слагаемых.

2 балла Рассуждение в верном направлении, не доведенное до ответа.

Задача 3. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где функции P и Q имеют вид

$$P(x,y) = y\log(x+y) - \frac{y^2}{x+y}, \qquad Q(x,y) = x\log(x+y) - \frac{x^2}{x+y},$$

а контур $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой отрезок параметрически заданной кривой

$$x(t) = e^t - 1, \quad y(t) = 1 - \sin(t)$$

между точками, отвечающими $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/2$.

Решение. Заметим, что контур интегрирования γ расположен в области $x+y>0$, в которой выполняется тождество

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Это означает, что существует функция $U(x,y)$, такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

Прямым вычислением находим $U(x,y) = xy(\log(x+y)-1)+C$, где C — произвольная константа, не влияющая на конечный ответ.

Таким образом, подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y).$$

Поскольку в области $x+y>0$ функция $U(x,y)$ не имеет особенностей, значение интеграла легко вычисляется:

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\gamma dU(x,y) = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = 0.$$

$\square$

Критерии

20 баллов Правильный ответ, полученный корректными рассуждениями.

15 баллов На основании равенства $\partial_y P = \partial_x Q$ сделан вывод о точности подынтегральной один-формы, но вычисление функции U проведено с ошибками.

10 баллов Вычисление интеграла проводилось корректным применением других методов (например, дополнением контура γ до замкнутого и применением формулы Грина или прямой подстановкой параметризации в контурный интеграл), но конечный ответ не получен или получен неправильный ответ.

Комментарий: В работах по профилю «Mathematics» данный критерий применялся только к работам, в которых найдено (возможно, с ошибками) большинство из получающихся при подстановке слагаемых.

5 баллов Отмечено равенство $\partial_y P = \partial_x Q$, но никаких выводов для вычисления интеграла не сделано или сделан ошибочный вывод, что интеграл вдоль любой кривой равен нулю.

Задача 4. Существуют ли матрицы A и B размера 2016×2016, такие что многочлены от A и B порождают подпространство размерности

a) 2042;

b) 2016^2.

Решение. Ответ: "существуют" в обоих пунктах.

В пункте а) можно, например, в качестве A взять диагональную матрицу, все диагональные элементы которой различны, а в качестве B — матрицу с 13 блоками $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ вдоль главной диагонали, далее единицы. Тогда степени матрицы A порождают пространство всех диагональных матриц (например, потому что A^k, $k = 1, ..., 2016$ независимы), а умножения на B позволяют получить также все блочно-диагональные матрицы вида «13 блоков 2×2, далее диагональная». Размерность пространства таких матриц равна $13 \times 4 + 2016 - 2 \times 13 = 2042$.

В работах участников встречалось много других правильных примеров.

В пункте б) можно взять, например, в качестве A матрицу поворота, переводящего элементы базиса друг в друга по циклу, а в качестве B — матрицу с единицей на одном из мест и нулями на всех остальных. Тогда произведения вида $A^k B A^l$, $1 \leq k \leq 2016$, $1 \leq l \leq 2016$ суть все матрицы вида «единица на одном из мест и нули на всех остальных». Действительно, умножение на A справа сдвигает вдоль цикла на -1 то, который базисный вектор не переходит в ноль, а умножение на A слева сдвигает вдоль цикла на 1 то, в который базисный вектор он переходит. Очевидно, любая матрица представима в виде линейной комбинации уже полученных. □

Критерии

10 баллов за пункт Правильный пример, верное обоснование.

9 баллов в п. а) Пример, который был бы правильным, если бы запрещалось использовать единичную матрицу.

5 баллов за пункт Правильный пример без обоснования или легко модифицируемый пример для другой размерности в п. а).

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните только один из следующих блоков заданий специальной части.

Since you are applying for the "Mathematics" progam, solve only the problems from the first block.

Block 1 «Mathematics»

Solutions of the problems in this section should be written in ***English****.*

Задача 1. Let f be the 10th iteration of the map $z \mapsto z^2 + 2$. Find the number of connected components of the set $f^{-1}(D)$, where $D = \{\, z \mid |z| < 10 \,\}$.

Решение. The map f is a branched double covering. It is easy to see (say, using Riemann–Hurwitz Formula) that the preimage of a *disc* D' under such covering is

- either a disc, if $2 \in D'$;
- or a disjoint union of two discs, if $2 \notin D'$.

It is easy to see that $2 \in D$, $f(2) \in D$, $f^k(2) \notin D$ for $k \geqslant 2$. Therefore, $f^{-1}(D)$ and $f^{-2}(D)$ are discs, then the number of connected components doubles every time we apply f^{-1}.

Answer: $2^8 = 256$. □

Критерии

15 **points** The statement "if $2 \notin D'$, then $f^{-1}(D')$ is not connected" is not justified. Say, the preimage of the set $\{\, z \mid 1 \leq |z-2| \leq 2 \,\}$ is connected.

15 **points** The above statement is fully justified but a student missed the fact that $2 \in D$, so got the wrong answer 1024.

5 **points** A student writes that the number of connected components doubles every time we apply f^{-1}, hence the answer is 1024.

Задача 2. Let F_2 be the free group with two generators. Prove that the commutator subgroup of F_2 is not finitely generated.

Решение. Let a, b be the generators of F_2. Recall that elements of F_2 are words in the alphabet a, b, a^{-1}, b^{-1} without subwords of the form xx^{-1} or $x^{-1}x$, $x \in \{a, b\}$, including the empty word. Let d_a be the homomorphism $F_2 \to Z$ given by $d_a(a) = 1$, $d_a(b) = 0$, i.e., $d_a(w)$ is the number of letters a in w minus the number of letters a^{-1} in w. Note that for any commutator $[x, y]$ we have $d_a([x, y]) = 0$.

Suppose that the commutator subgroup $[F_2, F_2]$ is finitely generated. Recall that elements of $[F_2, F_2]$ are products of commutators, hence we can and will suppose that $[F_2, F_2]$ is generated by finitely many commutators $[x_i, y_i]$. Let N be the maximum number of letters a in $x_i^{\pm1}$ or $y_i^{\pm1}$. Let us prove that $w_N = a^{N+1}ba^{-N-1}b^{-1}$ cannot be represented as a product of $[x_i, y_i]^{\pm1}$. Suppose that $w_N = [x_{i_1}, y_{i_1}]^{\pm1} \dots [x^{i_k}, y_{i_k}]^{\pm1}$. Then $a^{N+1} = [x_{i_1}, y_{i_1}]^{\pm1} \dots [x_{i_l}, y_{i_l}]^{\pm1}w$, where w is a subword of $[x_{i_{l+1}}, y_{i_{l+1}}]^{\pm1}$. Then $N + 1 = d_a(a^{N+1}) = d_a(w) \leq N$. This contradiction proves that $[F_2, F_2]$ is not finitely generated.

This solution has a geometric interpretation as well. It is easy to see that $[F_2, F_2]$ is the fundamental group of $\{ (x, y) \in {}^2 \mid x \in Z \text{ or } y \in B \}$. Suppose that this group is finitely generated. For each generator, let us fix a loop that represents this generator. Then the union of these loops is compact. Thus any product of theese loops does not leave some bounded domain. On the other hand, it is easy to see that the square $(0, 0)$–$(N, 0)$–(N, N)–$(0, N)$–$(0, 0)$ is not homotopic to a loop that does not visit the point (N, N). Hence, this square for N large enough does not belong to the subgroup generated by our loops. □

В этой задаче кроме полностью правильных и полностью неправильных решений было всего 2 работы, поэтому критериальных случаев нет.

Блок 2. «Математическая физика»

Решения задач в этой части следует записывать по-русски.

Задача 1. Однородный тонкий жесткий стержень длины ℓ и массы M может без трения свободно двигаться в горизонтальной плоскости. На концах стержня закреплены точечные массы m.

a) Определите число степеней свободы данной системы, введите соответствующие обобщенные координаты и составьте лагранжиан системы.

b) Напишите лагранжевы уравнения движения в терминах выбранных обобщенных координат.

c) Напишите выражения для интегралов движеня данной системы (если такие имеются).

Решение. a) Напомним, что число степеней свободы равно количеству независимых обобщенных координат, однозначно определяющих положение системы в пространстве. Данная система обладает тремя степенями свободы: две декартовы координаты плоскости фиксируют положение центра масс (совпадает с геометрическим центром стержня) и ещё одна координата — например, угол наклона стержня к оси Ox — фиксирует его ориентацию в плоскости. Поскольку внешние силы отсутствуют, лагранжиан системы совпадает с выражением ее кинетической энергии. Обозначим символами x и y координаты центра масс стержня относительно произвольной фиксированной декартовой системы координат в плоскости движения стержня, а угол наклона стержня к оси абсцисс обозначим φ. Строго говоря, для однозначного задания положения стержня мы должны различать точечные массы на его концах (например, пометив их метками 1 и 2) и углом φ считать угол между вектором $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и положительным направлением оси Ox, где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — радиус-векторы точечных масс 1 и 2.

Кинетическая энергия системы стержень+массы на концах равна сумме кинетической энергии T_1 поступательного движения центра масс и кинетической энергии T_2 вращения вокруг центра масс. Кинетическая энергия T_1 поступательного движения определяется скоростью изменения координат x и y:

$$T_1 = \frac{1}{2}\,(2m + M)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Здесь и ниже точка над символом обозначает взятие производной по времени.

Энергия вращения системы T_2 определяется мгновенной угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$. Кроме того, при записи выражения для вращательной энергии необходимо учитывать весомость стержня:

$$T_2 = \frac{m\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \frac{M\ell^2}{24}\dot{\varphi}^2.$$

В выражении для T_2 учтено, что точечные массы находятся на расстоянии $\ell/2$ от центра масс и момент инерции однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину равен $M\ell^2/12$.

Таким образом, лагранжиан системы может быть записан в виде:

$$L = T_1 + T_2 = (2m + M)\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + (6m + M)\,\frac{\ell^2\dot{\varphi}^2}{24}.$$

b) По каждой обобщенной координате q пишется уравнение движения (уравнение Эйлера-Лагранжа) вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Учитывая конкретный вид лагранжиана, получаем следующие уравнения движения:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{\varphi} = 0,$$

которые означают, что общее движение системы представляет собой равномерное и прямолинейное движение центра масс и равномерное вращение стержня вокруг центра масс.

c) В данном случае имеется три независимых интеграла движения, поскольку все три обобщенные координаты являются циклическими, то есть, входят в выражение для лагранжиана только в виде обобщенных скоростей. Таким образом, интегралами движения являются декартовы компоненты полного импульса системы:

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (2m + M)\dot{x}, \qquad P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (2m + M)\dot{y},$$

и z-компонента момента импульса системы

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (6m + M)\,\frac{\ell^2 \dot{\varphi}}{12}.$$

В данном примере это легко увидеть и непосредственно из уравнений движения. Заметим, также, что энергия системы тоже является интегралом движения, но этот интеграл представляет собой функцию (полином) от P_x, P_y и J_z.

□

Критерии п. a)

$+$ Правильный ответ для числа степеней свободы и верное выражение для лагранжиана в при любом возможном выборе обобщенных координат.

$\pm$ Ошибка в оценке числа степеней свободы.

$+/2$ Частично верное выражение для лагранжиана (например, не учтена энергия вращения стержня).

$\mp$ Верно определено только число степеней свободы, лагранжиан либо не написан, либо написан с существенными ошибками (неверное выражение для энергии через обобщенные координаты, наличие слагаемых с некорректной размерностью и т.п.).

Критерии п. b)

$+$ Правильный ответ для верно написанного лагранжиана.

$+/2$ Правильные уравнения движения для ошибочно написанного лагранжиана.

Задача 2. Точечный электрический заряд q покоится на оси Oz декартовой прямоугольной системы координат на расстоянии a от плоскости xOy, которая представляет собой бесконечную проводящую пластину.

a) Найдите модуль электростатической силы, действующей на заряд q.

b) Найдите потенциальную энергию взаимодействия заряда и пластины.

c) Найдите выражение поверхностной плотности зарядов $\sigma(x, y)$, индуцированных на проводящей пластине в точке с координатами (x, y).

Решение. a) Пусть для определенности заряд q находится на положительной полуоси Oz. На поверхности пластины будет индуцирован заряд, знак которого противоположен знаку заряда q. Электростатическое поле, создаваемое индуцированными зарядами, будет симметрично относительно вращений вокруг оси Oz и относительно отражений в плоскости xOy. Последнее обстоятельство позволяет легко найти вид этого поля. Действительно, внутри проводящей пластины результирующее поле (сумма поля точечного заряда q и поля индуцированных зарядов) должно равняться нулю. Поэтому, в области полупространства $z < 0$ поле *индуцированных* зарядов должно совпадать с полем точечного заряда $-q$, расположенного на оси Oz в точке с координатой a (то есть, там же, где расположен реальный точечный заряд q). Но тогда, в силу симметрии относительно отражений $z \mapsto -z$, в области $z > 0$ поле индуцированных зарядов будет совпадать с полем точечного заряда $-q$, расположенного на оси Oz в точке с координатой $(-a)$ — зеркально симметрично заряду q относительно плоскости xOy (принцип зеркальных отражений). Это позволяет найти модуль электростатической силы, действующей на заряд q со стороны пластины:

$$|\vec{F}| = \kappa \, \frac{q^2}{4a^2}.$$

Здесь коэффициент κ зависит от выбранной системы единиц.

b) Потенциальная энергия взаимодействия заряда и пластины может быть найдена из формулы для кулоновской силы:

$$dU(z) = -\vec{F}_z dz \quad \Rightarrow \quad U(z) = -\kappa \frac{q^2}{4z}.$$

Искомая энергия получается, если положить $z = a$:

$$U(a) = -\kappa \frac{q^2}{4a}.$$

Отметим, что в данной задаче нельзя вычислять потенциальную энергию как энергию взаимодействия двух точечных зарядов: заряда q и его зеркального отражения $-q$ в точке $z = -a$ (такой подход дает в 2 раза больший ответ). Причина этого в том, что поле системы заряд – пластина совпадает с полем двух точечных зарядов только в *половине* пространства $z > 0$, а во второй половине пространства поле нашей системы равно нулю. Вследствие этого, энергия системы заряд – пластина также равна *половине* энергии взаимодействия двух точечных зарядов.

c) Для вычисления поверхностной плотности индуцированных зарядов в точке пластины с координатами (x, y) проще всего воспользоваться законом Гаусса (интегральной формой одного из уравнения Максвелла). Действительно, вектор напряженности электростатического поля непостредственно у поверхности пластины $\vec{E}(x, y)$ направлен параллельно оси Oz (перпендикулярно пластине), его ненулевая декартова координата легко находится из принципа суперпозиции полей двух точечных зарядов — заряда q и его зеркального изображения:

$$E_z(x, y) = -\kappa \frac{2qa}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Выберем в качестве замкнутой поверхности, которая фигурирует в теореме Гаусса, бесконечно малый прямой цилиндр вокруг точки (x, y), основания dS которого параллельны пластине. Тогда поток электростатического поля через этот цилиндр будет равен $\Phi = E_z dS$, а заключенный внутри выбранного цилиндра заряд равен $dQ = \sigma(x, y) dS$. По теореме Гаусса,

$$\Phi = 4\pi\kappa dQ \quad \Rightarrow \quad \sigma(x, y) = -\frac{qa}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

□

Критерии п. a)

+ Правильный ответ для модуля кулоновской силы.

∓ Частично правильный ответ с попыткой обоснования.

Критерии п. b)

+ Правильный ответ для электростатической энергии с корректным обоснованием.

− Ошибочный ответ, основанный на замене системы заряд+пластина двумя точечными зарядами.

Критерии п. c)

+ Правильный ответ, полученный любым корректным способом (теорема Гаусса, уравнение Пуассона для потенциала и т.п.).

± Решение с небольшими ошибками (неверные коэффициенты и т.п.) или почти завершенное верное решение.

+/2 Не доведенное до конца решение, основанное на верной идее и правильно записанных уравнениях электростатики.

∓ Незаконченное решение, основанное на неясной идее, но содержащее хотя бы одно относящееся к делу и верно записанное уравнение.