Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2016 г.
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min. Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, maximal sum is equal to 100 points.

Уточнения по подаче апелляций и критериям оценивания

0-2 – Абитуриентом предложены идеи **решения** задачи. Приведено решение без объяснений, выкладок или доказательств.

3-5 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено.

6-7 – Правильное решение, но допущены ошибки или неточности в доказательстве. Нет реализации алгоритма, не разобраны все случаи или часть из них не доказана или разобрана с ошибками. Не оптимальное решение.

8-10 – Правильное решение при допущенных описках или неточностях. Апелляция оценок 8 и 9 не рассматривается.

Внутри группы критериев по каждой задаче апелляции не рассматриваются. То есть, если заявлен диапазон оценок 6-7 за "решение с ошибкой", то апелляция 6 до 7 не расматривается. Участник должен соотнести свое решение с кратким решением жюри и определеить, может ли он претендовать на более высокую **категорию** оценки по задаче.

Апелляции по оценке '0' делится на две части:

1. Если Ваше решение было пропущено (неразборчивый почерк; невыделенное решение, которое сложно заметить), то Вам обязательно надо подать апелляцию по данной задаче.

2. Если Ваше решение заметили, но Вы переписали условие, или предложили решение, которое основывается на незнании определений понятий и теорем, используемых в формулировке задачи. Обычно к этой задаче присутствует пометка '-' или '0' в тексте работы. В некоторых случаях, возможна апелляция такой задачи с '0' до '1' балла, однако Вы должны соотнести это с разумной необходимостью.

Исправления оценок в таблице учетов баллов связаны с обнаружением продолжения решения в черновике, которое могло увеличить или уменьшить количество баллов по задаче. Также это может быть связано с исправлениями проверяющего после обсуждения оценивания с председателем жюри.

Решением к задаче не должно было быть «сочинение по русскому языку».

В решении должны присутствовать ссылки на теоретические факты из программы с указанием точных формулировок теорем, которые применяются. Если утверждение, на которое ссылается абитуриент, не содержится в программе вступительных испытаний, то его неогбходимо доказать в работе.

Все выкладки должны быть равносильными преобразованиями; каждый случай оформлен отдельно.

Номер задания должен четко выделяться на фоне остального текста.

При обнаружении двух незачеркнутых решений одной и той же задачи на чистовике и черновике проверяются оба решения и выставляется минимальный балл. При написанном решении на черновике, на чистовие должен быть написан правильный ответ и ссылка на черновик.

Решения, приведенные ниже, не являются эталонными и призваны дать абитуриентам идеи к решению задач.

1. Определите, при каких значениях α, β сходится следующий интеграл:

1. Determine for which α, β does the following integral converge:

$$\int\limits_1^\infty x^\alpha (\ln x)^\beta dx.$$

Ответ: $\alpha < -1 < \beta$.

Решение. При $x \to +\infty$ выполняется $\forall \varepsilon > 0 \ln x = o(x^\varepsilon)$. Отсюда следует, что для сходимости интеграла в $+\infty$ должно выполняться условие для обобщенного гармонического ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \alpha + \varepsilon < -1, \Rightarrow \alpha < -1$$

При $\beta < 0$ $x = 1$ также является особой точкой подынтегральной функции. Делая замену $x = e^t$, мы получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha+1)t}}{t^{-\beta}}\, dt$$

В окрестности 0 функция $e^{(\alpha+1)t}$ ограничена. Интеграл сходится потому же признаку для обобщенного гармонического ряда при $-\beta < 1$, откуда $\beta > -1$. Случаи $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ разбираются отдельно или аккуратно оговариваются при оценке функций.

Критерии №1:

0-5 – Исследовано несколько случаев. В лучшем случае получен правильный ответ по α.

6-7 – При условии выполнения предыдущего пункта, указано, что 1 - особая точка.

8-10 – Приведено в целом верное решение, содержащее неточности или не полностью корректное и обоснованное доказательство.

2. Вычислите производную $f_n(x)$ решения $F_n(x)$ функционального рекуррентного соотношения

2. Compute the derivative $f_n(x)$ of the function $F_n(x)$ given by the recurrence relations

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + 2F_{n-2}(x) + 2^n(3nx - x - 3/2), \quad F_0(x) = 1, F_1(x) = x + 3.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{4}{3} + 2^n(n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{4}{3})$.

Решение. Общее решение после нахождения корней характеристического уравнения имеет вид:

$$F_n(x) = C_1(x)(-1)^n + C_2(x)2^n.$$

Частное решение ввиду резонанса имеет вид

$$F_n^p(x) = 2^n n(A(x)n + B(x)).$$

Коэффициенты вычисляются после подстановки $F_n^p(x)$ в исходное уравнение.

$$A(x) = x,\ B(x) = \frac{3}{2}(x - 1).$$

Аналогично вычисляются константы (относительно n) C_1 и C_2, подставляя $n = 0, 1$ в общее решение уравнения, которое ищется как сумма частного и однородного.

В итоге получаем:

$$F_n(x) = \frac{4x-4}{3}(-1)^n + \frac{7-4x}{3}2^n + 2^n n(xn + \frac{3}{2}(x-1)),$$

после чего вычисляется производная и получается ответ.

Замечание: Намного быстрее получался ответ у тех, кто, прочитав условие, сразу продифференцировал рекуррентное соотношение и начальные условия.

Критерии №2:

0-3 – Верно найдено общее решение однородного уравнения.

+3 – верно найдено частное решение.

+3 – правильно найдены константы из начальных условий.

+1 – правильно вычислена призводная.

Форма записи ответа - не единственная, поэтому ответ при общей правильности решения проверялся на начальных условиях.

3. Для дифференциального уравнения

3. For the differential equation

$$4y^2y' + 7x = 5xy^3$$

найдите все решения $y(x)$, являющиеся ограниченными при $x \to +\infty$.

find all solutions $y(x)$ bounded as $x \to +\infty$.

Ответ: $y = (\frac{7}{5})^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Уравнение с разделяющимися переменными:

$$4y^2dy = (5y^3 - 7)xdx(*)$$

При делении на выражение, зависящее от y, необходимо отдельно рассматривать случай, когда оно равно 0.

$$\frac{4}{15}\int \frac{d(5y^3-7)}{5y^3-7}dy = \int xdx,$$

$$\ln \mid 5y^3 - 7 \mid = \frac{15x^2}{8} + C,$$

$$5y^3 - 7 = \pm e^{\frac{15x^2}{8}+C},$$

что в комбинации со случаем (*) дает нам решение вида

$$5y^3 - 7 = \pm e^c e^{\frac{15x^2}{8}},$$

которое ограничено только при $D = 0$.

Критерии №3:

0-1 – Указано, что $y = C$ – решение.

2 – Найден ответ исходя из предыдущего предположеиния.

3-5 – найдено точное решение, с ошибками или неточностями по ходу эквивалентных преобразований. Не указаны условия на ограниченность решения или указано, что такого не существет.

6-10 – Приведено в целом верное решение, содержащее неточности или не полностью обоснованное доказательство при правильно найденном общем решении.

4. Докажите, что не существует самодвойственных функций:

4. Prove that there is no self-dual functions:

$$f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f^{(n)}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})},$$

существенно зависящих в точности от двух переменных.

that is essentially dependent exactly on two variables.

Ответ: ■.

Решение. Наиболее коротким решением было заметить, что в СДНФ функции присутствует только 2 элементарных конъюнкции, с одинаковым литералом по одной из переменных (из-за того, что самодвойственная функция принимает разные значения на противоположных наборах).

$$f(0,0) \neq f(1,1);\; f(0,1) \neq f(1,0).$$

Тогда функция, существенно зависящая от 2 переменных, принимает значение 1 ровно на двух наборах, отличающихся в одной компоненте. Пусть это будет первая позиция , тогда наши наборы записываются в виде (a_1, a_2) и $(!a_1, a_2)$. В этом случае верно следующее представление функции через ее СДНФ:

$$f(x,y) = x^{a_1} \wedge y^{a_2} \vee x^{!a_1} \wedge y^{a_2} = x^{a_1} \wedge (y \vee !y) = x^{a_1} \wedge 1 = x^{a_1}. \blacksquare.$$

Допускалось решение полным перебором всех 16 функций от двух переменных.

Критерии №4:

0-2 – Даны определения.

3-5 – Построены таблицы или проведены рассуждения, но они не учитывают условие. Проведено решение, которое использует **просто зависимость** (а не ровно от двух) переменных, что выполняется на различных наборах по определению, и не может быть применено в виде преобразований с функциями от набора переменных. Подобные рассуждения приводили к тому, что самодвойственных функций вообще не существует.

6-10 – Приведено в целом верное решение, содержащее не полностью обоснованное доказательство.

5. Докажите формулу свертки Вандермонда:

5. Prove the Vandermonde convolution formula:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$$

при условии, что $\binom{n}{k} \equiv 0$ для $k < 0$ или $k > n$.

with $\binom{n}{k} \equiv 0$ for $k < 0$ or $k > n$.

Ответ: $\blacksquare$.

Решение. Наиболее простым решением было перемножить два бинома Ньютона $(1+x)^r * (1+x)^s$ и посчитать коэффициент с индексом $(n+m)$. Он получается по формуле свертки,и доказывается в общем виде при помощи математической индукции по индексу.

Альтернативным решением было комбинаторное представление через формулу Байеса для числа способов выбрать (m+n) белых и черных шаров, при условии, что белых не более чем r, и черных не более чем s. В данном решении необходимо было привести доказательсвто независимости выборки и обосновать формулу суммирования, а также посчитать граничные индексы суммирования.

Критерии №5:

0-4 – Верно найдены пределы в сумме. Проведены некоторые комбинаторные преобразования или предложены идеи, но они не верны.

5-7 – Приведена верная идея решения, но она не достаточно обоснована. Отсутствует доказательство в комбинаторном решении, которое заменяется рассуждениями о возможности выбрать. Неправильно раскрыты скобки в произведении биномов Ньютона.

8-10 – Приведено в целом верное решение, содержащее незначительные неточности в доказательстве.

6. Обозначим количества вершин, ребер и граней (частей, на которые ребра разбивают плоскость, включая внешнюю часть) связного планарного графа через V, E и F соответственно.

Докажите, что для связного планарного графа $2E \geq 3F$ при $E > 1$.

Докажите, что связный граф без петель и кратных ребер на 10 вершинах, степень каждой из которых равна 5, не может быть изображен на плоскости без самопересечений.

6. For a connected planar graph denote the quantities of vertices, edges and faces (parts into which the plane is divided by the edges, including the outer part) by V, E and F correspondingly.

Prove the inequality $2E \geq 3F$ for a connected planar graph with $E > 1$.

Prove that the connected graph without loops and multiple edges that consists of 10 vertices of degree 5 cannot be drawn on the plane without self-intersections.

Ответ: $\blacksquare$. Граф не планарен.

Решение. Вкратце, каждой грани связного планарного графа инцидентно не менее 3 ребер (кроме внешней, для которой существенно условие E>1 и 2*2>3*1). С другой стороны, каждое ребро считается дважды для смежных по ребру граней. Таким образом доказывается первое утверждение.

Вторая часть решалась через формулу Эйлера, формулу на число ребер и степеней вершин и результат из первой части задачи:

$$\sum_{v \in G} deg(v) = 2E \Rightarrow 10 * 5 = 2E \Rightarrow E = 25.$$

$$V - E + F = 2 \Rightarrow F = 17 \Rightarrow 2 * 25 \geq 3 * 17.$$

Получили противоречие, которое доказывает, что граф не планарен.

Идея доказывать через теорему о наличии подграфов, подобных (не изоморфных!) K_5 или $K_{3,3}$ не была правильно доказана ни в одном решении, хотя ее упоминание давало 1-2 балла.

Критерии №6:

0-2 – Верно найдены количество граней и/или ребер в графе.

+2 и +1 – Предложены идеи доказательства 1-й или 2-й части соответственно.

4-6 баллов за полностью доказанную первую часть. +3-4 балла за вторую часть.

8-10 – обе части решены и решение второй части основывается на доказанной первой части.

Среди следующих задач решите не менее четырех. В зачет вам пойдут четыре лучших решения.

Solve at least four of the following problems. Up to four best solutions will be graded.

7. Найдите все вещественные решения уравнения

7. Find all real solutions of the equation

$$y^{IV} - 8y'' + 16y = e^{2x} + 6x\sin x.$$

Ответ: $(C_1x + C_2)e^{2x} + (C_3x + C_4)e^{-2x} + \frac{6}{25}x\sin x + \frac{24}{125}\cos x + \frac{1}{32}x^2e^{2x}$.

Решение. Общее решение после нахождения корней ± 2 (оба кратности 2) характеристического уравнения имеет вид:

$$y = (C_1x + C_2)e^{2x} + (C_3x + C_4)e^{-2x}.$$

Частное решение для первой функции в правой части ввиду резонанса имеет вид

$$y_1 = Ex^2e^{2x}.$$

Частное решение для второй функции в правой части резонанса на самом деле не имеет, и ищется в виде

$$y_2 = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Коэффициенты вычисляются после подстановки y_1, y_2 по отдельности в исходное уравнение.

Критерии №7:

0-1 – Найдены корни характеристического уравнения, общее решение выписано с ошибкой.

2-3 – Верно найдено общее решение однородного уравнения.

При правильно посчитанном общем решении:

+4 – верно найдено частное решение с резонансом.

+3 – правильно найдено второе частное решение.

8. Докажите при $n \geq 1$ тождество

8. Prove the identity for $n \geq 1$

$$(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = \begin{vmatrix} x & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & n-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & n-3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Ответ: $\blacksquare$.

Решение. Рекуррентные соотношения для применения метода математической индукции можно найти по ссылке: *Многочлены Эрмита*

Критерии №8:

0-3 – Найдено рекуррентное соотношение на определитель.

+1-2 за рекуррентное соотношение на производную для многочлена Эрмита.

+5 за строгое доказательство рекуррентного соотношения для производной в общем случае.

При решении учитывалось, что Вы должны были разложить определитель по строке и получить рекуррентное соотношение, которое затем нужно доказать для левой части тождества.

9. Даны $x_1, \ldots, x_n$. Найдите состоятельную точечную оценку параметра θ для гипотезы о равномерном распределении данных в интервале $[0.\theta]$. Является ли она несмещенной?

9. For a given data $x_1, \ldots, x_n$ find a consistent point estimation of the parameter θ for the hypothesis of a uniform data distribution in the range $[0, \theta]$. Is it unbiased?

Ответ: $\hat{\Theta}_1 = max(X_1, \ldots, X_n) = X_{(n)}$. $\hat{\Theta}_2 = 2\overline{X} = 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Решение для получения оценки максимального правдоподобия (которая является состоятельной, ноне всегда несмещенной): *Оценка максимального правдоподобия*

Критерии №9:

0-3 – Есть идея решения, но она не обоснована. Не доказана состоятельность оценки.

4-7 – Приведена оценка, доказана состотельность, но не доказана несмещенность (или наоборот, но состоятельность более важна, чем несмещенность).

8-10 – Подробное решение с доказательством состоятельности на основе известного факта ОМП, через функцию распределения или оценку математического ожидания и дисперсии при увеличении размера выборки.

При решении учитывалось, что Вы должны были найти оценку максимального правдоподобия, которая оценивалась на 1 балл больше, чем оценка удвоенного выборочного среднего.

10. Выясните математическое ожидание случайной величины, имеющей функцию плотности:
$\frac{1}{\pi}(\arctan x)'$.

10. Find the mean value of random variable with the following density function:
$\frac{1}{\pi}(\arctan x)'$.

Ответ: Математического ожидания не существует.

Решение получается мгновенно после интегрирования из которого следует, что математическое ожидание распределения Коши не существует: *Распределение Коши*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{a,b\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+(-a)^2}\right) \Rightarrow \nexists \lim$$

Критерии №10:

0 – считается интеграл от функции плотности вместо математического ожидания.

+1 – за вычисленную производную.

+1 – за определение или формулу математического ожидания.

3 – за вычисления математического ожидания в виде V.P. интеграла в главном значении.

+1 – если указаны разные пределы интегрирования, но посчитано не верно.

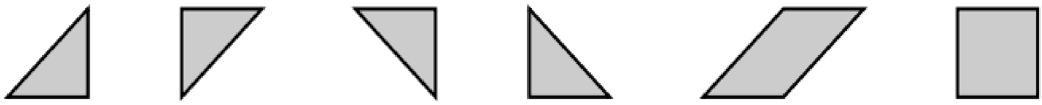
2-4 – за интегрирование по частям расходящихся интегралов и пределов.

5-7 – верный ход решения и указание на отсутствие математического ожидания, но не верное обоснование.

8-10 – верное решение.

11. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 1 и длины n, используя плитки высоты 1 следующих видов:

11. How many coverings of the rectangle with height 1 and length n exist, if we use only tiles with height 1 of the following types:



Ответ: $\frac{1}{4}((2+\sqrt{2})^{n+1}+(2-\sqrt{2})^{n+1})$.

Решение. Существует 3 (больше) способов решения данной задачи.

Комбинаторные:

$$f(n) = 3f(n-1) + \sum_{i=1}^{n-2} f(i)$$

или решение через систему, позволяющую выразить $f(n)$ из верхнего рекуррентного уравнения:

$$\begin{cases} f(n) = 3f(n-1) + g(n-1), \\ g(n) = f(n-1) + g(n-1), \end{cases}$$

где $g(n)$ отвечает за замощение "скошенной шоколадки с ромбом". В последнем случае, система решается подстановкой (n-1) в первое уравнение и вычитание с исходным первым уравнением.

Правильное рекуррентное соотношения на ответ:

$$f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2), f(0) = 1,\ f(1) = 3,\ f(2) = 10,\ \ldots$$

Жюри на консультации предлагало решение через построение регулярного выражения на основе единственности представления.

Пронумеруем фигуры цифрами от 1 до 6 слева направо.

Тогда решение задачи представляется следующим регулярным выражением:

$$((34) \cup (6) \cup (25^*1))^*$$

Вводя производящую функцию $F(x)$ относительно весовой функции длины шоколадки по нижней границе мы получим:

$$F(x) = \frac{1}{1 - \left(1 * x + 1 * x + 1 * \dfrac{1}{1-x} * x\right)}$$

знаменатель которой имеет вид $2x^2 - 4x + 1$, а корни, обратные его корням, попадают в форму ответа:

$$f(n) = C_1(2+\sqrt{2})^n + C_2(2-\sqrt{2})^n.$$

Константы находятся из начальных условий или точного разложения функции в ряд и приравнивания коэффициентов.

Критерии №11:

0-2 – предложены комбинаторные идеи с сочетаниями и размещениями, не доведенные до ответа и/или неправвльные.

3-4 – выписано рекуррентное соотношение $f(n) = 3f(n-1) + f(n-2)$ или иное неправильное. Дальнейшие условия на производящую функцию не учитываются.

5-6 – правильно выписано рекуррентное соотношение и/или производящая функция, но допущена существенная ошибка в вычислениях.

6-8 – допущенная арифметическая ошибка при подсчете констант.

8-10 – верное решение. 1-2 балла вычиталось за отсутствие упрощений в окончательной форме ответа.

12. Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров, насаженными на стержень, и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней за 2^{n-1} перекладываний.

12. There is a pyramid of n rings of increasing sizes stacked on a bar such that the largest ring is at bottom, and two empty bars of the same height. The allowed moves consist in moving the top ring from any bar to another, provided that a bigger ring is never put on top of a smaller one. Prove that the full stack of rings can be moved to a different bar in $2^n - 1$ moves.

Ответ: ■.

Решение задачи о Ханойской башне получается рекурсивным перекладыванием верхних (n-1) колец, перкладыванием 1 самого большого на оставшийся стержень, и потом рекурсивного перекладывания стопки из (n-1) колец на большое кольцо. Рекуррентная формула имеет вид:

$$h(n) = 2h(n-1) + 1, h(1) = 1 \Rightarrow h(n) = 2^n - 1.$$

В условии была допущена опечатка. Всем, кто ее заметил, писав работу в регионах, и кто ***правильно*** *доказывал верную оценку была выставлена оценка не ниже 7. Жюри приносит свои извинения за допущенную ошибку.*

Критерии №12:

0-3 – частные случаи. Решения по "аналогии".

4-7 – описательные доказательства, похожие на мат. индукцию, но содержательно не точные. Отсутствие проверки базы индукции. Ошибки в решении. Баллы вычитались, если не доказывалось, что не может быть другого решения, отличного от условия.

8-10 – верное решение.

13. Для набора $C = \{(X(i), Y(i)) \colon 1 \leq i \leq N\}$ точек на плоскости приведите псевдокод алгоритма, вычисляющего пару точек из C, расстояние между которыми минимально.

14. Для набора $C = \{(X(i), Y(i)) \colon 1 \leq i \leq N\}$ точек на плоскости приведите псевдокод алгоритма, вычисляющего выпуклую оболочку C.

13. For a collection $C = \{(X(i), Y(i)) \colon 1 \leq i \leq N\}$ of points in the plane give a pseudocode of an algorithm that calculates a pair of points in C that have the smallest distance from each other.

14. For a collection $C = \{(X(i), Y(i)) \colon 1 \leq i \leq N\}$ of points in the plane give a pseudocode of an algorithm that calculates the convex hull of C.

Ответ: См. ниже.

Решение №№ 13-14 получается на основе метода разделяй и властвуй для задачи о *наименьшем расстоянии между точками на плоскости* и допускается 2 решения *быстрой выпуклой оболочки* или алгоритма *заметающей прямой* для задачи №14.

Критерии №13-14:

0-3 – написаны идеи алгоритма в виде несвязанных идей или незавершенного набора команд. Не засчитывались алгоритмы без инициализации и/или не содержащие описания структур данных.

3-5 – более подробные алгоритмы без проверки корректности и содержащие ошибки.

6 – квадратичный (работающий за $O(n^2)$) алгоритм.

+1 – за указание сложности и того, что можно быстрее, а приведенный алгоритм работает медленно.

7-10 – приведен алгоритм с использованием подхода “разделяй и властвуй”, правильно описана идея алгоритма и псевдокод. Учтены граничные условия, описана сложность работы алгоритма.