Международная олимпиада молодежи
International Youth Olympiad

Математика — Демонстрационный вариант
Mathematics – demo version

11 класс
year 11

Для поступления на ряд программ ВШЭ достаточно решать первые 5 задач, а на программы с сильной математической составляющей нужно решить больше.

В скобках после номера задачи указано, сколько баллов дается за ее решение.

For admission to some programs of HSE it suffices to be solving just the first 5 problems. For programs with strong mathematical component, it is necessary to solve more.

The grade points given for the solution of each problem are indicated in the parentheses after the number of the problem.

1 (6). После перехода на новое оборудование общие затраты электроэнергии снизились на 16%, а выпуск изделий вырос на 50%. На сколько процентов уменьшилось количество электроэнергии, расходуемое на производство одного изделия? На каждое изделие уходит одно и то же количество электроэнергии. After an equipment renovation in an enterprise the total cost of electricity dropped down by 16% while the production increased by 50%. What is the percentage by which the electricity cost per item dropped down? Production of every item requires the same amount of electricity.

2 (6). Найдите значение выражения $\arcsin(\cos(-26,8\pi))$. Calculate the expression $\arcsin(\cos(-26,8\pi))$.

3 (6). В треугольнике ABC через точки M и N, лежащие на биссектрисе AD, проведены прямые m и n, параллельные основанию BC, причем $AM : MN : ND = 3 : 2 : 1$. В каком отношении прямые m и n делят площадь треугольника ABC? Consider a triangle ABC and points M, N of its angular bisector AD. Let m and n be lines through M and N parallel to the base BC and such that $AM : MN : ND = 3 : 2 : 1$. Find the ratio in which the lines m и n divide the area of the triangle ABC.

4 (6). Найдите все действительные корни уравнения $(2x^2-7x+3)(2x^2-x+3)+8x^2=0$. Find all real roots of the equation $(2x^2-7x+3)(2x^2-x+3)+8x^2=0$.

5 (9). Найдите множество значений величины $z=(x-4)(y+2)$ при условии, что x и y подчинены следующим неравенствам:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) \leqslant 0 \\ (y-1)(y-4) \geqslant 0 \end{cases}.$$

Find the set of values of the expression $z=(x-4)(y+2)$, where x and y are subject to the following inequalities:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) \leqslant 0 \\ (y-1)(y-4) \geqslant 0 \end{cases}.$$

---

6 (18). Сколькими способами можно выбрать 8 натуральных чисел a_1, a_2, …, a_8 так, чтобы выполнялось $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_8 \leqslant 8$? In how many ways can one choose 8 natural numbers (positive integers) a_1, a_2, …, a_8 so that $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_8 \leqslant 8$?

7 (23). Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b, такие что $2a^2+3b^2$ делится на $2a+3b$. Find all pairs of coprime natural numbers (positive integers) a and b such that $2a^2+3b^2$ is divisible by $2a+3b$.

8 (26). Числа Фибоначчи F_n определяются следующим образом:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Докажите, что число Фибоначчи F_n совпадает с ближайшим целым числом к $\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, то есть

$$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right],$$

где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. (Квадратными скобками обозначена целая часть числа.)
Fibonacci numbers F_n are given by

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Prove that the Fibonacci number F_n coincides with the nearest integer to $\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, that is,

$$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right],$$

where $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ is the Golden Mean. (The integer part of a real number is denoted by square brackets.)