

Международная олимпиада молодежи
International Youth Olympiad

Математика — Демонстрационный вариант
Mathematics – demo version

10 класс
year 10

Для поступления на ряд программ ВШЭ достаточно решить первые 5 задач, а на программы с сильной математической составляющей нужно решить больше.

В скобках после номера задачи указано, сколько баллов дается за ее решение.

For admission to some programs of HSE it suffices to be solving just the first 5 problems. For programs with strong mathematical component, it is necessary to solve more.

The grade points given for the solution of each problem are indicated in the parentheses after the number of the problem.

1 (3). Вычислите $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$. Calculate $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

2 (5). Найдите максимальное значение n , при котором сумма $S_n = a_1 + \dots + a_n$ арифметической прогрессии $a_1 = -9, a_2 = -5, a_3 = -1, \dots$ будет меньше 2015. Find the maximal value of n for which the sum $S_n = a_1 + \dots + a_n$ of the arithmetic series $a_1 = -9, a_2 = -5, a_3 = -1, \dots$ is less than 2015.

3 (10). Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD , причем хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите длину общей хорды AB , если $CB = 4, DB = 1$. Two circles intersect at points A and B . Consider chords AC and AD , one in each circle, drawn so that the chord of the one circle is tangent to the other circle. Find the length of the common chord AB provided that $CB = 4$ and $DB = 1$.

4 (10). График функции $g(x)$ получается путем сжатия к прямой $x = -2$ (вдоль оси абсцисс) графика функции $f(x)$ в 5 раз. Какой формулой описывается функция $g(x)$? Сжатие к вертикальной прямой вдоль оси абсцисс в 5 раз — это преобразование плоскости, при котором каждая точка переходит в точку с той же ординатой, но которая в 5 раз ближе к данной вертикальной прямой. The graph of the function $g(x)$ is obtained from that of the function $f(x)$ by the 5-fold contraction towards the line $x = -2$ (along the x -axis). Give a formula for the function $g(x)$. A 5-fold contraction towards a vertical line is the transformation of the plane mapping every point to the point at the same altitude that is 5 times closer to the given vertical line.

5 (12). Найдите множество (вещественных) значений параметра c , при которых имеет решения система

$$\begin{cases} (x + 5)(x + 4) \leq 0 \\ y^2 \geq 4 \\ (x + 3)(y + 5) - c = 0 \end{cases} .$$

Find the set of those (real) values of the parameter c , for which the following system has at least one solution:

$$\begin{cases} (x + 5)(x + 4) \leq 0 \\ y^2 \geq 4 \\ (x + 3)(y + 5) - c = 0 \end{cases} .$$

6 (16). Рассмотрим шахматную доску размера 14×9 . Каким числом различных путей можно добраться из левого нижнего угла этой доски в правый верхний угол, если двигаться разрешается только по границам клеток и только в направлениях вправо и вверх? Consider a chessboard of size 14×9 . How many different paths are there connecting the bottom left corner with the top right corner of the chessboard if we can move only along the boundaries of the cells either to the right or upwards?

7 (18). Существует ли натуральное число, являющееся целой степенью двойки и такое, что перестановкой его цифр можно получить другую целую степень числа 2? Строго обоснуйте ответ. Is there a natural number (positive integer) that is an integer power of 2 and such that some permutation of its digits yields another integer power of 2? Rigorously justify your answer.

8 (21). Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству $3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$. Find all pairs of integers (x, y) that satisfy the equality $3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$.