Олимпиада для студентов и выпускников 2017г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации

по направлению «Математика»

Профили:
«Mathematics»
«Математическая физика»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполения задания — 240 минут

Каждая из задач оценивается из 20 баллов, если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам.

Each problem costs 20 points, if the sum exceeds 100, the result is equal to 100 points.

I. Общая часть / COMMON PART

Решения задач в этой части можно записывать по-русски или по-английски.

Solutions of the problems in this section should be written in Russian or in English.

1. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

1. Does the following series converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}?$$

2. Пусть G — конечная группа, а $\alpha : G \to G$ — автоморфизм группы G, такой что $\alpha(x) = x$ только если x является единичным элементом. Докажите, что всякий элемент группы G может быть представлен в виде $x^{-1}\alpha(x)$, где $x \in G$.

2. Let G be a finite group, and $\alpha : G \to G$ an automorphism of G such that $\alpha(x) = x$ only if x is the identity. Prove that every element of the group G can be represented in the form $x^{-1}\alpha(x)$, where $x \in G$.

3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задан эллипсоид с главными полуосями a, b, c. Вокруг него произвольным образом описан прямоугольный параллелепипед (так, что эллипсоид касается каждой из граней параллелепипеда). Найдите длину главной диагонали параллелепипеда.

3. In the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, an ellipsoid with semi-principal axes of lengths a, b, c is given. A rectangular parallelepiped is circumscribed around it so that the ellipsoid is tangent to all faces of the parallelepiped. Compute the length of the principle diagonal in the parallelepiped.

4. Решите уравнение $u_t = -u^2 u_x$ с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$. Найдите максимальное значение T, такое, что неособое решение существует на множестве $t \in [0, T)$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Solve the initial value problem $u_t = -u^2 u_x$, $u(x, 0) = \cos x$. Find the maximal value of T such that a non-singular solution exists on the set $t \in [0, T)$, $x \in \mathbb{R}$.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Блок 1 «Mathematics»

*Solutions of the problems in this section should be written in **English**.*

1. Let n be the number of ordered triples (A_1, A_2, A_3) consisting of sets A_1, A_2, A_3 such that

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Find the prime factorization of n.

2. Let V be a finite dimensional vector space over the field of real numbers. The sum $A+B$ of sets $A, B \subset V$ is defined as the set of all vectors of the form $a+b$, where $a \in A$, $b \in B$. For any $\lambda \in \mathbb{R}$, the set λA is by definition the set of all vectors of the form λa, where $a \in A$. Prove that an open set A satisfies the equality $A + A = 2A$ if and only if A is convex.

Блок 2. «Математическая физика»

Решения задач в этой части следует записывать по-русски.

1. Грузик массы m на двух пружинах жесткости k подвешен между вертикальными стенками. В исходном положении обе пружины ориентированы горизонтально и не испытывают натяжения, грузик находится на расстоянии ℓ от каждой из стен. Силы тяжести нет. В начальный момент времени грузику придается скорость v_0 в вертикальном направлении. Определите зависимость скорости грузика от его положения.

2. Заряд Q равномерно распределен вдоль тонкого кольца радиуса R. На прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости, на расстоянии r от центра кольца расположена материальная точка массы m, имеющая заряд q того же знака, что и Q. Какую минимальную скорость необходимо сообщить материальной точке в направлении кольца, чтобы она прошла через центр кольца?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Задачи на математической олимпиаде, как правило, немного сложнее, чем на экзамене в магистратуру. Решение этих задач требует не только определенной теоретической подготовки, но и оригинальной стратегии решения. Теоретическая подготовка должна включать следующие темы (в рамках стандартной программы математических факультетов):

- общая алгебра (включая теорию групп и элементы комбинаторики)
- линейная алгебра
- математический анализ (включая многомерный анализ и теорию меры)
- комплексный анализ
- обыкновенные дифференциальные уравнения
- простейшие методы теории уравнений с частными производными

Для решения некоторых задач блока «Математика» необходимо знакомство с топологией (общая топология, фундаменальные группы). В варианте олимпиадного задания, конечно, могут быть представлены не все из перечисленных тем.

В задачах блока «Математическая физика» используются основные понятия классической механики и электродинамики.

Содержание следующих книг и учебных пособий полностью покрывает необходимый теоретический материал.

- Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М: Факториал 1999
- А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль I, записки лекций `http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-1/m1_total.pdf`
- И.Р. Шафаревич, Основные понятия алгебры, Ижевск: РХД 1999
- И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
- В.А. Зорич, Математический анализ, М: МЦНМО 2007
- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
- В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, Геометрия, М: МЦНМО 1997
- Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Лань 2004
- В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: РХД 2000
- В.И. Арнольд, Лекции об уравнениях с частными производными, М: Фазис 1999
- В.И. Арнольд, Математические методы классической механики, Москва: Наука 1979
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т.1, Механика, Москва: Физматлит, 2004
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т.2, Теория поля, Москва: Физматлит, 1988
- О.Я. Виро, О.А. Иванов, В.М. Харламов и Н.Ю. Нецветаев, Элементарная топология, `http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/rus-book.pdf`