Exam demo-version

1. (10%) Evaluate the following limit:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right),$$

где последнее равенство использует теорему о предельном переходе для непрерывных функций. Далее используем разложение в ряд Маклорена.

$$\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = \frac{\ln(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2))}{x} = \frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x} = -\frac{1}{2},$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. (10%) Find and classify the discontinuity points of the following function:

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

Точки, в которых данная функция может иметь разрыв: $x = 0$, поскольку в ней равен нулю знаменатель аргумента функции, и точки $x = 1/k, k \in \mathbb{Z}$, поскольку в них $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ меняет знак. В точках $x = 1/k, k \in \mathbb{Z}$ функция имеет разрывы первого рода, так как существуют не равные между собой односторонние пределы. Например, рассмотрим $k = 1$. Существует правосторонняя окрестность точки $x = 1$, в которой функция $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ положительна. В самом деле, для $x \in (1, 2)$ имеет место $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{x} < \pi$. Для точек из этой окрестности имеем $f(x) = 1$, следовательно, $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$. С другой стороны, существует левосторонняя окрестность точки $x = 1$, в которой функция $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ отрицательна. В самом деле, для $x \in (1/2, 1)$ имеет место $\pi < \frac{\pi}{x} < 2\pi$. Для точек из этой окрестности имеем $f(x) = -1$, следовательно, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = -1$. Аналогичные окрестности могут быть найдены для всех рассматриваемых точек.

В точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода, поскольку не существует односторонних пределов. Действительно, рассмотрим последовательности $a_n = \frac{2}{1+4n}, n \in \mathbb{N}$ и $b_n = \frac{2}{3+4n}, n \in \mathbb{N}$, стремящиеся к нулю справа. Тогда $f(a_n) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{1+4n}}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = 1$ и $f(b_n) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3+4n}}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = -1$. Тем самым показано, что правостороннего предела $f(x)$ при x стремящемся к нулю не существует. Аналогично можно показать, что не существует левостороннего предела, например, рассмотрев последовательности $-a_n$ и $-b_n$.

3. It is known, that the 2×2 matrix A has $\operatorname{tr}(A) = -7$ (matrix trace, the sum of diagonal elements) and $\det(A) = 0$.
   (a) (5%) Find the eigenvalues of A

Let λ_1, λ_2 be the eigenvalues of A. Then $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Hence, $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 0$

(b) (5%) Find B^{2017} for $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

The matrix B has eigenvalues $\lambda_1 = -7$ and $\lambda_2 = 0$ and corresponding eigenvectors $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Then B can be represented as $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
Hence, $B^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-7)^{2017} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

4. It is known that A is a square matrix and

$$A^T X A = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix},$$

(a) (3%) Find $\mathrm{rank}(X)$

$\det(A^T X A) = \det(A) \cdot \det(X) \cdot \det(A) = 18 \cdot (-3 \cdot 3) = -162 \neq 0$ (since $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).
Hence, $\det(X) \neq 0$ and $\mathrm{rank}(X) = 3$.

(b) (2%) For given matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ find the determinant $\det(X)$

$\det(A) = 9$, $\det(A)^2 \cdot \det(X) = -162$, hence, $\det(X) = -2$.

(c) (5%) For given matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ find the matrix X and test it for positive and negative definiteness.

It is not hard to find that $X = \begin{pmatrix} 2 & -22/9 & 2/3 \\ -22/9 & 724/27 & -145/9 \\ 2/3 & -145/9 & 10 \end{pmatrix}$.
Check the principal minors signs: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$. Using Sylvester's criterion, we conclude that X is indefinite.

5. (10%) Solve the differential equation:

$$y''' - 4y'' + y' = 2x^2 + 1.$$

Сначала запишем решение однородного дифференциального уравнения:

$$y''' - 4y'' + y' = 0.$$

Составим к нему характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda = 0.$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}.$$

То есть общее решение дифференциального уравнения может быть записано как

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Найдем частное решение этого дифференциального уравнения. В данной задаче – резонансный случай, поскольку $\left(2x^2+1\right)e^0 = 2x^2+1$. То есть будем искать частное решение в виде $y = (ax^2+bx+c)x$. Тогда

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$y''' = 6a$$

Следовательно,

$$6a - 4(6ax + 2b) + 3ax^2 + 2bx + c = 2x^2 + 1$$

$$3ax^2 + 2bx - 24ax + 6a - 8b + c = 2x^2 + 1.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 6a - 8b + c = 1 \\ 2b - 24a = 0 \\ 3a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 61 \\ b = 8 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \frac{2}{3}x^3 + 8x^2 + 61x,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

6. (10%) Find the points of maximum of the function

$$F(u,v) = \sqrt{u}\left(\sqrt{u} - 2\right) - \sqrt{v}\left(\sqrt{v} - 2\right),$$

given that $\sqrt{u} \le 2,\ \sqrt{v} \le 2$

1. Выполняем замену переменных $x = \sqrt{u},\ y = \sqrt{v}$. Далее путем несложных алгебраических преобразований выражения для целевой функции приводим ее к виду: $G(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2 + 3$. При этом ограничения принимают вид $x \in [0,2],\ y \in [0,2]$
2. Определяем наличие экстремумов внутри области поиска, определенной ограничениями.

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 2(x-1),\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = -2(y-1),\ \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя критерий Сильвестра, легко проверить, что в точке (1,1) у функции $G(x,y)$ нет экстремумов.

3. Проанализируем наличие экстремумов на границах области поиска.

   Граница$\{x = 0,\ y \in [0,2]\}$, $G(0,y) = 1 - (y-1)^2$. В точке (0, 1) достигается **максимум** равный 1, в конечных точках функция равна 0.

   Граница $\{y = 0,\ x \in [0,2]\}$, $G(x,0) = (x-1)^2 - 1$. В точке (1, 0) достигается минимум равный – 1, в конечных точках функция равна 0.

   Граница $\{x = 2,\ y \in [0,2]\}$, $G(0,y) = 1 - (y-1)^2$. В точке (2, 1) достигается **максимум** равный 1, в конечных точках функция равна 0.

   Граница $\{y = 2,\ x \in [0,2]\}$, $G(x,2) = (x-1)^2 - 1$. В точке (1, 2) достигаетсяминимум равный – 1, в конечных точках функция равна 0.

4. Возвращаемся к начальному преобразованию.

Ответ: Точки максимума: (0, 1) и (4, 1)

Неполная попытка решить задачу не выполняя преобразование — не более 8 баллов за верный ответ.

7. There are three coins in the bag. Two coins are unbiased, and for the third coin the probability of «head» is equal to 0.8. James Bond chooses one coin at random from the bag and tosses it

   (a) (5%) What is the probability that it will show «head»?

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{head}) = \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.8 = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0.6$$

   (b) (5%) What is the conditional probability that the coin is unbiased if it shows «head»?

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.5}{0.6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

8. The pair of random variables X and Y with $\mathbb{E}(X) = 0$ and $\mathbb{E}(Y) = 1$ has the following covariance matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) (5%) Find $\mathbb{V}\text{ar}(X+Y)$, $\mathbb{C}\text{orr}(X,Y)$, $\mathbb{C}\text{ov}(X-2Y+1, 7+X+Y)$

$$\mathbb{V}\text{ar}(X+Y) = 10 + 9 - 2 \cdot 2 = 15$$

$$\mathbb{C}\text{orr}(X,Y) = \frac{-2}{\sqrt{10 \cdot 9}}$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(X-2Y+1, 7+X+Y) = \mathbb{V}\text{ar}(X) - 2\,\mathbb{C}\text{ov}(Y,X) + \mathbb{C}\text{ov}(X,Y) - 2\,\mathbb{V}\text{ar}(Y) = 10 - (-2) - 18 = -6$$

   (b) (5%) Find the value of a if it is known that X is independent of $Y - aX$.

For independent variables the covariance is equal to zero: $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y - aX) = 0$. Hence, $a = \frac{\mathbb{C}\text{ov}(X,Y)}{\mathbb{V}\text{ar}(X)} = -0.2$.

9. You have height measurements of a random sample of 100 persons, $y_1, \ldots, y_{100}$. It is known that $\sum_{i=1}^{100} y_i = 15800$ and $\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 2530060$.

   (a) (3%) Calculate unbiased estimate of population mean and population variance of the height

Оценка среднего: $\bar{y} = 15800/100 = 158$.

Несмещённая оценка дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1} = 340$$

   (b) (3%) At 4% significance test the null-hypothesis that the population mean is equal to 155 cm, against two-sided alternative.

Наблюдаемое значение Z-статистики

$$Z_{obs} = \frac{158 - 155}{\sqrt{340}/\sqrt{100}} = 1.63$$

Критическое значение $Z_{crit} = 2.05$.

Вывод: гипотеза H_0 не отвергается.

(c) (2%) Find the p-value

Находим по таблице, что площадь справа от 1.63 примерно равна 5%. Значит P-значение равно 10%.

(d) (2%) Find the 96% confidence interval for the population mean

Интервал имеет вид

$$[158 - 2.05 \cdot \sqrt{340/100}; 158 + 2.05 \cdot \sqrt{340/100}]$$

Итого: $[154.2; 161.8]$

10. Density function of a random variable Y is given by

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} y e^{-y/\theta}, \text{ if } y > 0 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

You have 3 observations on Y: $y_1 = 48, y_2 = 50, y_3 = 52$.

(a) (4%) Using maximum likelihood, find the estimate of θ

Нахождение оценки:

$$\begin{aligned} &\ln(L) = \sum_{i=1}^{n}(-\ln(\theta^2) + \ln(y_i) - \tfrac{y_i}{\theta}) \\ &\ln(L) = -2n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n}\ln(y_i) - \tfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta} \\ &\tfrac{\partial \ln(L)}{\partial\theta} = -\tfrac{2n}{\theta} + \tfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta^2} = 0 \\ &\widehat{\theta} = \tfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{2n} = \tfrac{\overline{y}}{2} \end{aligned}$$

Подставляя наши данные, получаем $\widehat{\theta} = 25$.

(b) (3%) Is the estimator $\hat{\theta}$ unbiased?

Несмещенность:

$$\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = \tfrac{\mathbb{E}(y_i)}{2}$$

Найдём математическое ожидание y_i:

$$\mathbb{E}(y_i) = \textstyle\int_0^{+\infty} \tfrac{1}{\theta^2} y^2 e^{-y/\theta} dy$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(y_i) = \textstyle\int_0^{+\infty} \tfrac{2y}{\theta} e^{-y/\theta} dy \\ &\mathbb{E}(y_i) = \textstyle\int_0^{+\infty} 2e^{-y/\theta} dy \\ &\mathbb{E}(y_i) = 2\theta \end{aligned}$$

Тогда $\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = \frac{\mathbb{E}(y_i)}{2} = \theta$. Оценка несмещенная.

(c) (3%) Calculate the variance of $\hat{\theta}$

Для расчёта дисперсии вычислим $\mathbb{E}(y_i^2)$:

$$\mathbb{E}(y_i^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta^2} y^3 e^{-y/\theta} dy$$

Аналогично предыдущему случаю, интегрируем по частям. Получаем:

$$\mathbb{E}(y_i^2) = 6\theta^2$$

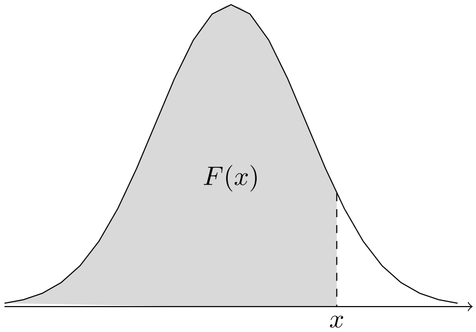
Тогда

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_i) = 6\theta^2 - 4\theta^2 = 2\theta^2$$

И дисперсия оценки

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\widehat{\theta}) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\frac{\overline{y}}{2}) = \frac{1}{4n}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_i) = \frac{\theta^2}{2n}$$

Good luck!



x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0.050	0.520	0.750	0.773	1.450	0.926	2.150	0.984
0.100	0.540	0.800	0.788	1.500	0.933	2.200	0.986
0.150	0.560	0.850	0.802	1.550	0.939	2.250	0.988
0.200	0.579	0.900	0.816	1.600	0.945	2.300	0.989
0.250	0.599	0.950	0.829	1.650	0.951	2.350	0.991
0.300	0.618	1.000	0.841	1.700	0.955	2.400	0.992
0.350	0.637	1.050	0.853	1.750	0.960	2.450	0.993
0.400	0.655	1.100	0.864	1.800	0.964	2.500	0.994
0.450	0.674	1.150	0.875	1.850	0.968	2.550	0.995
0.500	0.691	1.200	0.885	1.900	0.971	2.600	0.995
0.550	0.709	1.250	0.894	1.950	0.974	2.650	0.996
0.600	0.726	1.300	0.903	2.000	0.977	2.700	0.997
0.650	0.742	1.350	0.911	2.050	0.980	2.750	0.997
0.700	0.758	1.400	0.919	2.100	0.982	2.800	0.997

Рис. 1: Distribution function of a standard normal random variable