Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

8-1 Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

Решение. Утверждается, что n удовлетворяет условию задачи, если и только если его разложение $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ на простые множители имеет вид либо $n = p^5$, либо $n = p_1 p_2^2$. Действительно, для каждого $j = 1, \ldots, k_1$ имеется $(k_2+1) \ldots (k_s+1)$ делителей числа n, содержащих p_1 в степени j в разложении на простые множители: все эти делители имеют вид $p_1^j p_2^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$, $m_i \in \{0, \ldots, k_i\}$. Следовательно, произведение всех делителей числа n содержит p_1 в степени $(k_2+1) \ldots (k_s+1)(1+\cdots+k_1)$. Условие, что произведение всех делителей равно n^3, эквивалентно утверждению, что каждое p_j входит в их произведение в степени $3k_j$, и, тем самым, предыдущее произведение скобок равно $3k_1$. Следовательно, $(k_2+1) \ldots (k_s+1) \leqslant 3$. С другой стороны, $k_j \geqslant 1$. Отсюда следует, что либо $s = 2$, $k_2 \leqslant 2$ (из симметрии $k_1 \leqslant 2$), либо $s = 1$ и $n = p^k$, $p = p_1$, $k = k_1$. В первом случае должно выполняться равенство $(k_2+1)(1+\ldots+k_1) = 3k_1$ и аналогичное равенство с переменой k_1 и k_2 местами. Это возможно только в том случае, когда $k_2 = 2$, $k_1 = 1$ (с точностью до перестановки). Во втором случае, когда $n = p^k$, все делители числа n суть $1, p, \ldots, p^k$, а их произведение равно p в степени $1+\ldots+k$. По условию задачи последняя сумма должна быть равна $3k$: $1+\ldots+k = 3k$. Для чисел $k = 1, 2, 3, 4$ это не верно, а для числа $k = 5$ верно. При $k > 5$ рассматриваемое равенство неверно:

$$1 + l \ldots + k > k + (k-1) + (k-2) + 1 + 2 = 3(k-1) + 3 = 3k.$$

Значит, во втором случае $k = 5$. Итак, все числа $n \neq 1$, удовлетворяющие условию задачи, имеют разложение на простые множители вида либо $n = p_1 p_2^2$, $p_1 \neq p_2$, либо $n = p^5$; $p_1, p_2, p > 1$. Перечислим те из них, которые не превосходят 100.

- Числа $n = p_1 p_2^2 \leqslant 100$. Имеем $p_2 < 10$, тем самым, $p_2 \in \{2, 3, 5, 7\}$. С другой стороны, $p_2^2 \geq 4$, а значит, $p_1 \leqslant 25$. Следовательно, $p_1 \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$, $p_1 \neq p_2$. Выписывая всевозможные произведения $n = p_1 p_2^2$, не превосходящие 100, с вышеуказанными p_1 и p_2, получаем

$$2 \times 3^2 = 18,\ 2 \times 5^2 = 50,\ 2 \times 7^2 = 98,\ 3 \times 2^2 = 12,\ 3 \times 5^2 = 75,$$
$$5 \times 2^2 = 20,\ 5 \times 3^2 = 45,\ 7 \times 2^2 = 28, 7 \times 3^2 = 63,\ 11 \times 2^2 = 44,$$
$$11 \times 3^2 = 99,\ 13 \times 2^2 = 52,\ 17 \times 2^2 = 68,\ 19 \times 2^2 = 76,\ 23 \times 2^2 = 92.$$

- Единственное $n = p^5$, не превосходящее 100, есть 32. Итого получаем список всех возможных чисел n:

$n = 1,\ 12,\ 18,\ 20,\ 28,\ 32,\ 44,\ 45,\ 50,\ 52,\ 63,\ 68,\ 75,\ 76,\ 92,\ 98,\ 99.$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение	$+$	20
Правильное доказательство, в ответе не хватает одного числа	$+.$	18
Правильный ответ с доказательством без второго либо оба примера без доказательства; верная идея про корни, но арифметическая ошибка в решении	$\pm$	15
Правильное решение, но упущено до трёх ответов, ответ 32 указан	$\pm$	15
Правильный ответ без доказательства без второго либо доказательство без примеров	$+/2$	12
Забыто 32 и ещё несколько чисел	$\mp$	9
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

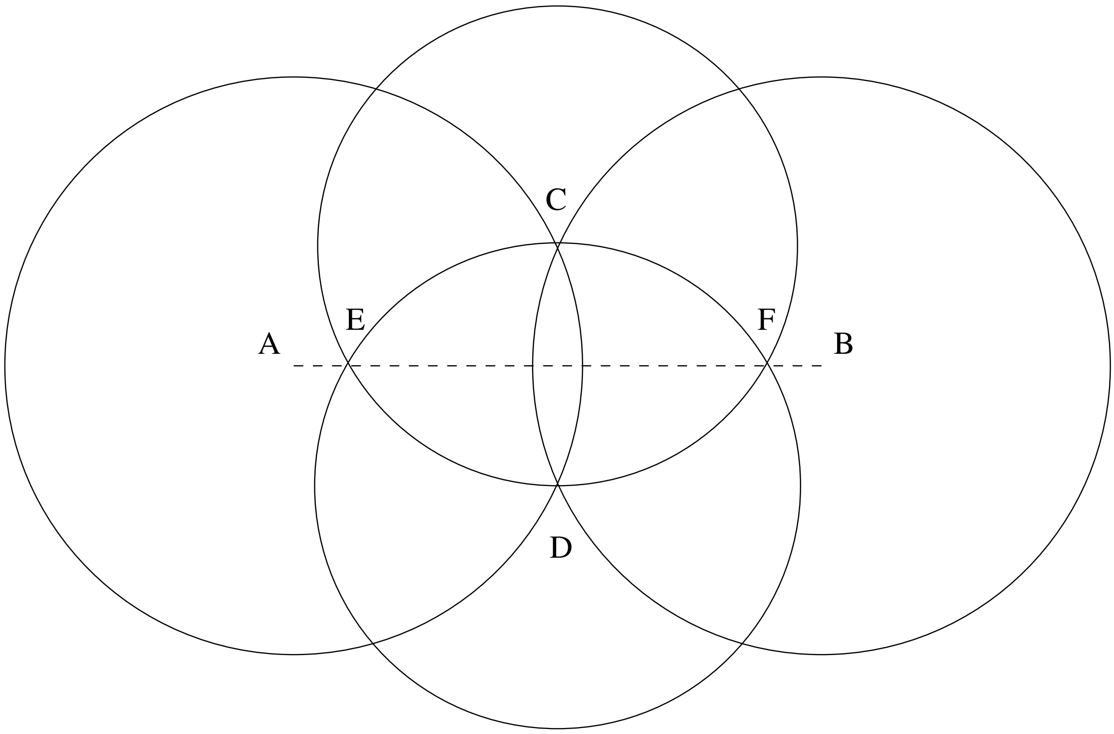
8-2 У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см), и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 11 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

В решении достаточно указать правильный способ построения. Доказывать его правильность не обязательно.

Решение.

Пусть A и B — рассматриваемые точки. Проведём окружности максимально возможного радиуса 6 см с центром в них. Отметим их точки пересечения C и D. Расстояние между ними будет не больше 6 см. Проведём окружность с центром в точке C через точку D и окружность с центром в точке D через точку C. Обозначим через E и F их точки пересечения. Они лежат на отрезке $[A, B]$ в силу симметрии, причём центральная симметрия отрезка $[A, B]$ меняет E и F местами. Таким образом, одна из них, скажем, E будет заведомо ближе к точке A, а точка F — к точке B, то есть $|AE| = |BF| < \frac{11}{2} = 5.5$. Соединим точки A и E отрезком. (Можно даже провести отрезок с началом A побольше, на всю линейку). Соединим также B и F отрезком. А теперь соединим точки E и F отрезком. Можно показать, что расстояние между ними меньше 10 см, так что это действительно возможно. А можно это и не использовать. А именно, можно провести более длинный отрезок с началом A вместо $[A, E]$ и соединить его конец с точкой B или F. См. рисунок.



Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное построение (в том числе без объяснений)	$+$	20
Построен ромб	$\mp$	6
Сказано что решение начинается с предварительного построения точек C и D, но не сказано, как это продолжить	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-3 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+z}{2}, \\ \sqrt{y} = \frac{z+x}{2}, \\ \sqrt{z} = \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

Решение. Ответ: (0, 0, 0), (1, 1, 1).

По условию, $x, y, z \geqslant 0$, так как квадратный корень из каждого из них корректно определён. В силу симметрии без ограничения общности будем считать, что $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Суммируя уравнения системы, получим

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = x + y + z. \tag{1}$$

Отсюда следует, что всякое решение системы либо совпадает с $(1, 1, 1)$ или с $(0, 0, 0)$ (и это суть решения системы), либо удовлетворяет неравенству $x > 1 > z$. Действительно, в противном случае три числа x, y, z либо все не меньше 1, либо все не больше 1, и хотя бы для одного из них соответствующее неравенство является строгим. А отсюда следует, что левая часть уравнения (1) строго больше (соответственно, меньше) правой, за исключением случая, когда каждое из чисел x, y, z равно своему корню. Последнее имеет место только тогда, когда каждое из них равно либо 0, либо 1, то есть единственные возможные случаи суть: $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$. Но последние две тройки не являются решениями, так как для них не выполняется третье (соответственно, первое) уравнение системы. Итак, всякое решение системы удовлетворяет неравенству $x > 1 > z > 0$. Более того, $y > 1$, так как в противном случае, когда $y \leqslant 1$, с одной стороны, $\sqrt{x} > 1$, а с другой стороны, $\sqrt{x} = \frac{y+z}{2} < 1$, в силу первого уравнения системы. Итак, $x \geqslant y > 1 > z$. А тогда, с одной стороны, $\sqrt{z} < 1$, а с другой стороны, $\sqrt{z} = \frac{x+y}{2} > 1$, в силу третьего уравнения системы. Полученное противоречие доказывает, что других решений, кроме двух найденных, нет.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Нахождение обоих решений с доказательством, что других нет	$+$	20
Нахождение обоих решений с неполным доказательством, что других нет (например, в доказательстве выше упущены подслучаи)	$\pm$	15
Нахождение одного решения с частью доказательством, что других нет (например, приведена часть неравенств выше, но второе решение упущено)	$\mp$	7
Нахождение обоих решений без доказательства, что других нет	$-.$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-4 На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

Решение. При решении задачи будем использовать *свойство уменьшения первого разряда.* Оно состоит в том, что при умножении двух цифр a и b получается либо однозначное число (цифра), либо двузначное, и в последнем случае первая цифра двузначного произведения меньше, чем минимальная из цифр a, b. Действительно, двузначные числа $a0 = 10 \times a$ и $b0 = 10 \times b$ больше, чем ab, так как $a, b < 9$. Тем самым, на каждом шаге либо получается на цифру меньше (первый случай), либо число цифр сохраняется, но минимальная из всех цифр, написанных на доске, не увеличивается.

Будем доказывать утверждение задачи индукцией по числу n

цифр, изначально написанных на доске.

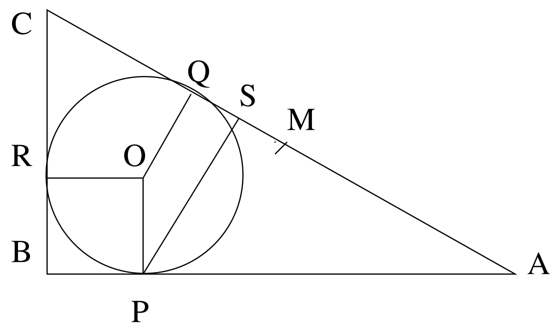
База индукции: при $n=1$ утверждение очевидно. Утверждение для $n=2$ следует из свойства уменьшения первого разряда, в силу которого через несколько шагов останется одна цифра.

Шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $n=k$. Докажем его для $n=k+1$. Пусть m — минимальная из цифр, написанных на доске. Достаточно показать, что через несколько шагов либо число цифр уменьшится, либо минимальная цифра уменьшится: появится цифра меньше m. Предположим противное. Тогда число цифр не уменьшается и в каждый момент есть цифра m, к которой очередной шаг задачи не применяется: каждый шаг не затрагивает хотя бы одну цифру m. В противном случае, если осталась одна или две цифры m и к ней (соответственно, к ним обеим) применен шаг задачи, и при этом число цифр не уменьшается, то минимальная цифра уменьшится в силу свойства уменьшения первого разряда. Вышесказанное эквивалентно тому, что все шаги задачи применяются к меньшему набору цифр: ко всем, кроме одной из цифр m. А тогда, по предположению индукции, через несколько шагов на доске, кроме цифры m, останется одна цифра. Это сводит шаг индукции к случаю двух цифр, для которого утверждение задачи доказано. Шаг индукции доказан.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Замечено и доказано свойство уменьшения первого разряда, а также что при применении шага к произвольному набору минимальная цифра не увеличивается	$\pm$	12
Замечено и доказано одно из вышеупомянутых свойств	$\mp$	9
Замечено одно из двух вышеупомянутых свойств без доказательства	$-.$	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-5 В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$. Вписанная окружность касается стороны AB в точке P, а стороны AC — в точке Q; M — середина стороны AC. Докажите, что $PM = PQ$.

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, r —



её радиус, а R — точка её касания со стороной BC. Четырёхугольник $PORB$ — квадрат, сторона которого равна радиусу r. Треугольник BCM равнобедренный: $BM = CM$ (это верно для любого прямоугольного треугольника). А в нашем случае он даже равносторонний, так как $\angle C = 90° - 30° = 60°$. Имеем $CB = CM$. Кроме того, $CR = CQ$, так как Q и R — точки касания вписанной окружности с лучами, выпущенными из точки C. Следовательно, $MQ = BR = r$. Пусть S — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону AC. Имеем $QS = OP/2 = r/2$, так как QS есть ортогональная проекция отрезка OP на сторону AC, а угол между ними равен $60°$. Напомним, что $QM = r$. Тем самым, S — середина отрезка QM. Итак, прямоугольные треугольники PSQ и PSM равны. Значит, $PM = PQ$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное доказательство	$+$	20
Доказано, что QM равно радиусу вписанной окружности	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-6 Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

Решение. Будем представлять партию в виде ориентированного графа: партийцев — в виде вершин, а если партиец A доверяет партийцу B, то соединим вершину A с B ребром со стрелкой, направленной от A к B. Условие того, что никакие два партийца не доверяют друг другу, эквивалентно условию того, что никакие две вершины не соединены двумя противоположно направленными ориентированными ребрами. Будем называть это *условием одного ребра.* Построим пример партии из 11 человек, удовлетворяющей условию задачи. Разместим 11 человек в вершинах правильного 11-угольника $A_1 \ldots A_{11}$. Для каждой вершины A_i направим по ориентированному ребру из неё в каждую из пяти вершин, следующих за ней по часовой стрелке. Утверждается, что условие одного ребра выполнено. Действительно, для каждого ориентированного ребра, идущего от некоторой вершины A_i к A_j, имеется не более 4 вершин, следующих от A_i к A_j в направлении по часовой стрелке. А остальных вершин 11-угольника, отличных от A_i, A_j и вышеупомянутых последовательных вершин между ними не меньше, чем $11-6=5$, и они идут последовательно от A_j к A_i по часовой стрелке с «другой стороны». Предположим противное: условие одного ребра не выполнено, то есть некоторая пара вершин A_i и A_j соединена двумя противоположно направленными рёбрами. Тогда в силу предыдущего, имеется два набора последовательных вершин, каждый из не более, чем 4 вершин: вершины одного набора идут от A_i к A_j по часовой стрелке, а вершины другого — от A_j к A_i по часовой стрелке. Следовательно, эти наборы не пересекаются, и вместе с вершинами A_i и A_j (итого не более, чем $4+4+2=10$ вершин) они покрывают все 11 вершин 11-угольника. Полученное противоречие доказывает, что условие одного ребра выполнено.

Докажем теперь, что для партии меньшего размера это не возможно. Пусть n — общее число членов партии, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда общее число ориентированных рёбер равно $5n$: по 5 рёбер, исходящих из каждой вершины. С другой стороны, общее число рёбер не превосходит множества пар различных вершин (условие одного ребра), которое, в свою очередь, равно $C_n^2=\frac{n-1}{2}n$. Тем самым $5n \leqslant \frac{n-1}{2}n$, а, значит, $\frac{n-1}{2} \geqslant 5$, то есть $n \geqslant 11$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено построение партии из 11 человек и доказано, что меньше нельзя	$+$	20
Приведено построение партии из 11 человек, но не доказано, что меньше нельзя	$\pm$	14
Доказано, что меньше 11 сделать нельзя, но пример не построен	$+/2$	12
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	