

**Профили:**

«Mathematics»

КОД - 010-011

«Математика и математическая физика»

Время выполнения задания - 240 мин.

*Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая из задач оценивается из 20 баллов; если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам.*

*Solutions must be written in English or in Russian. Each problem is worth 20 points; if the sum exceeds 100, then the resulting grade is set to be 100.*

**I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ / COMMON PART**

1. Шесть одинаковых монет лежат в вершинах правильного шестиугольника, касаясь друг друга. Седьмая такая же монета катится без скольжения по внешней стороне этих, касаясь их по очереди. Сколько оборотов сделает эта монета, вернувшись в исходное положение?

1. Six identical coins lie at the vertices of a regular hexagon touching each other. The seventh coin of the same size rolls without slipping along the exterior sides of these ones, touching them one after another. How many full turns has the last coin made, when it returns to the initial position for the first time?

2. Придумайте некоммутативную группу с нечетным количеством элементов.

2. Construct a noncommutative group with an odd number of elements.

3. Может ли множество всех движений плоскости, переводящих данный многоугольник в себя, состоять из

- a) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 2017 меняющих ориентацию;
- b) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 1720 меняющих
- c) только из 2017 сохраняющих ориентацию движений?

3. Can the set of all the isometries of the plane taking a given polygon onto itself consist

- a) of 2017 orientation-preserving isometries and 2017 orientation-reversing isometries;
- b) of 2017 orientation-preserving isometries and 1720 orientation-reversing isometries;
- c) just of 2017 orientation-preserving isometries?

4. Существует ли функция  $f$ , аналитическая на всей комплексной плоскости, такая что  $f(z)^3 = 1 + e^z$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ ?

4. Does there exist a function  $f$ , analytic on the whole complex plane, such that  $f(z)^3 = 1 + e^z$  for each  $z \in \mathbb{C}$ ?

## II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

*Выберите и выполните только один из блоков заданий специальной части в соответствии с выбранной вами программой магистерской подготовки.*

*According to the Master of Science program of your choice, please solve only one block from the following.*

### 1. «Mathematics»

*Solutions of the problems in this section should be written in English.*

1. In two-dimensional space, the attraction force between point masses is inversely proportional to the distance between them. Prove that each system of 100 fixed point masses in two-dimensional space has less than 100 equilibrium points (that is, points such that the attraction forces of the point masses equilibrate).

2. Let  $0 < C < 1$  be a fixed number. Is it true that each sequence of compact subsets of the unit segment  $[0; 1]$  having measure at least  $C$  contains a subsequence, in which the intersection of all the compacta has positive measure?

### 2. «Математика и математическая физика»

*Решения задач в этой части следует записывать по-русски.*

1. На концах тонкого невесомого нерастяжимого стержня длины  $l$  закреплены два небольших одинаковых шарика. В начальный момент эта конструкция стоит вертикально на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Нижнему шару мгновенно сообщается скорость  $v_0$  в горизонтальном направлении (т.е. параллельно поверхности).

- а) При каких значениях скорости  $v_0$  нижний шарик будет скользить, не отрываясь от плоскости?
- б) Найдите модуль и направление скорости верхнего шарика в момент его удара о горизонтальную поверхность.

2. Пластины плоского конденсатора, имеющие форму квадрата со стороной  $a$ , расположены на расстоянии  $d$  друг от друга. Расстояние  $d$  пренебрежимо мало по сравнению с длиной стороны квадрата  $a$ . Конденсатор подключен к идеальному источнику постоянного тока с ЭДС  $U$ . Квадратная пластина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , стороной квадрата  $a$  и толщиной  $d$  вставлена в пространство между пластинами конденсатора на расстояние  $x$ ,  $0 \leq x \leq a$ . Найдите величину силы, втягивающей диэлектрик внутрь конденсатора. Объясните физическую причину возникновения такой силы.

Олимпиада для студентов и выпускников – 2017 г.