Олимпиада для студентов и выпускников — 2017 г.
по направлению «Математика»

Профили:
«Mathematics»
«Математика и математическая физика»

Время выполения задания — 240 минут

Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая из задач оценивается из 20 баллов; если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам
Solutions must be written in English or in Russian. Each problem is worth 20 points; if the sum exceeds 100, then the resulting grade is set to be 100.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ / COMMON PART

1. Шесть одинаковых монет лежат в вершинах правильного шестиугольника, касаясь друг друга. Седьмая такая же монета катится без скольжения по внешней стороне этих, касаясь их по очереди. Сколько оборотов сделает эта монета, вернувшись в исходное положение?

1. Six identical coins lie at the vertices of a regular hexagon touching each other. The seventh coin of the same size rolls without slipping along the exterior sides of these ones, touching them one after another. How many full turns has the last coin made, when it returns to the initial position for the first time?

Решение 1. (Задача предложена М. Финкельбергом.) Ответ: 4.

За то время, пока монета прокатится по дуге α неподвижной монеты, она повернется на угол 2α. Остается найти сумму дуг, состоящих из таких точек неподвижных монет, которых подвижная монета касалась при своем движении. Эта сумма равна 4π, откуда число оборотов равно $4\pi \cdot 2/(2\pi) = 4$.

Эта задача подробно разбирается в журнале “Квант” N4 за 1971 год, стр. 37-38, http://kvant.mccme.ru/1971/04/p37.htm

Критерии. 15 баллов — верные рассуждения, но неверный ответ из-за арифметической ошибки.

10 баллов — правильно вычислена длина пути центра или точки касания монеты, но ответ неверный.

2. Придумайте некоммутативную группу с нечетным количеством элементов.

2. Construct a noncommutative group with an odd number of elements.

Решение 2. (Задача предложена А. Эстеровым) Например, подойдет группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где x, y, z пробегают все элементы поля $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ остатков по модулю 3. В этой группе 27 элементов.

Минимальный пример группы, удовлетворяющей условию, состоит из 21 элемента.

3. Может ли множество всех движений плоскости, переводящих данный многоугольник в себя, состоять из

a) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 2017 меняющих ориентацию;

b) 2017 движений, сохраняющих ориентацию, и 1720 меняющих

c) только из 2017 сохраняющих ориентацию движений?

3. Can the set of all the isometries of the plane taking a given polygon onto itself consist

a) of 2017 orientation-preserving isometries and 2017 orientation-reversing isometries;

b) of 2017 orientation-preserving isometries and 1720 orientation-reversing isometries;

c) just of 2017 orientation-preserving isometries?

Решение 3. (Задача предложена С. Локтевым.) Ответы: a) да; b) нет; c) да.

В пункте a) примером будет правильный 2017-угольник. В пункте c) — невыпуклый $2 \cdot 2017$-угольник в форме "шестеренки", который получается построением на всех сторонах правильного 2017-угольника, как на основаниях, равных одинаково ориентированных неравнобедренных треугольников. Множество всех движений плоскости, переводящих полученный многоугольник в себя, состоит из 2017 поворотов, и не содержит ни одного отражения.

В пункте b) искомого многоугольника не существует, так как количества сохраняющих и меняющих ориентацию движений различны и не равны нулю (здесь и далее мы говорим только о движениях, переводящих многоугольник в себя). Действительно, предположим от противного, что такой многоугольник существует. Рассмотрим любое меняющее ориентацию движение f плоскости. Тогда все движения разбиваются на пары вида $(g, f \circ g)$, где g пробегает все сохраняющие ориентацию движения. Тогда $f \circ g$ пробегает все меняющие ориентацию движения. Значит, сохраняющих и меняющих ориентацию движений поровну. Противоречие.

Критерии. 15 баллов — верное решение 2 из 3 пунктов задачи.

5 баллов — верное решение 1 из 3 пунктов задачи.

4. Существует ли функция f, аналитическая на всей комплексной плоскости, такая что $f(z)^3 = 1 + e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$?

4. Does there exist a function f, analytic on the whole complex plane, such that $f(z)^3 = 1+e^z$ for each $z \in \mathbb{C}$?

Решение 4. (Задача предложена В. Тиморином.) Ответ: нет. Предположим от противного, что аналитическая на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ удовлетворяет равенству $f(z)^3 = 1 + e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$? Полагая $z = i\pi$, по формуле Эйлера получаем $f(i\pi) = 0$. Дифференцируя равенство $f(z)^3 = 1 + e^z$, получаем $3f'(z)f(z)^2 = e^z$. Полагая $z = i\pi$, получаем $0 = -1$, противоречие.

Критерии. 19 баллов — верный ответ и в целом верные рассуждения, но содержащие формулы с дробными степенями или кубическими корнями из комплексных чисел, без объяснения, в каком смысле понимаются эти операции.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

Выберите и выполните только один из блоков заданий специальной части в соответствии с выбранной вами программой магистерской подготовки.

According to the Master of Science program of your choice, please solve only one block from the following.

1. «Mathematics»

Solutions of the problems in this section should be written in English.

1. In two-dimensional space, the attraction force between point masses is inversely proportional to the distance between them. Prove that each system of 100 fixed point masses in two-dimensional space has less than 100 equilibrium points (that is, points such that the attraction forces of the point masses equilibrate).

Решение 5. (Problem suggested by A. Esterov.) Let $z_1, \dots, z_{100} \in \mathbb{C}$ and $m_1, \dots, m_{100} \in \mathbb{C}$ be the positions and the masses of the point masses. The attraction force at a point $z \in \mathbb{C}$ equals

$$f(z) = \sum_{k=1}^{100} \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_k} = \frac{P(\bar{z})}{\Pi_{k=1}^{100}(\bar{z} - \bar{z}_k)}$$

for some polynomial $P(z)$ of degree less than 100 not vanishing identically. By the main theorem of algebra $P(z)$, hence $f(z)$, has less than 100 roots. Thus there are less than 100 equilibrium points.

Критерии. 20 баллов — верные рассуждения, но не проверено, что многочлен $P(z)$ не равен нулю тождественно.

15 баллов — верные рассуждения, но формула для силы притяжения не обоснована.

10 баллов — верные рассуждения, но основанные на формуле для силы притяжения, верной только в случае равных масс.

2. Let $0 < C < 1$ be a fixed number. Is it true that each sequence of compact subsets of the unit segment $[0; 1]$ having measure at least C contains a subsequence, in which the intersection of all the compacta has positive measure?

Решение 6. (Задача предложена В. Богачевым, решение — пользователями сайта http://dxdy.ru.) Ответ: нет.

Будем пользоваться записью чисел отрезка $[0, 1]$ в двоичной системе счисления. Некоторые числа имеют две таких записи — одна с периодом (0), другая — с пероиодом (1). Для всех таких чисел, для определённости, будем использовать первую запись, за исключением числа 1, которое будем записывать как $0,(1)$.

Решим задачу сначала для $C = 1/2$. Обозначим E_k множество тех чисел отрезка $[0, 1]$, в двоичной записи которых k-тая цифра после запятой равна 0. Тогда $\mu(E_k) = \frac{1}{2}$, в то время как мера пересечения любых n из них равна $\frac{1}{2^n}$. Поэтому никакое множество положительной меры не может содержаться в бесконечном числе этих E_k.

Решим теперь задачу для произвольного $0 < C < 1$. Возьмем такое m, что $1 - \frac{1}{2^m} > C$. Рассмотрим множества $E_{k,m} = \bigcup_{j=mk-m+1}^{mk} E_j$, для которых $\mu(E_{k,m}) = 1 - \frac{1}{2^m}$. Мера пересечения n таких множеств равна $(1 - \frac{1}{2^m})^n$.

Действительно, каждое из них может быть представлено как объединение $2^m - 1$ дизъюнктных множеств, каждое из которых имеет меру $\frac{1}{2^m}$ (оно характеризуется цепочкой из m цифр 0 и 1, начинающейся с разряда $mk - m + 1$). Пересечение n дизъюнктных множеств имеет меру $\frac{1}{2^{mn}}$, и мы имеем $(2^m - 1)^n$ дизъюнктных множеств в пересечении.

Критерии. 20 баллов — верное решение хотя бы для одного числа C.

2. «Математика и математическая физика»

Решения задач в этой части следует записывать по-русски.

1. Два одинаковых маленьких шарика, связанных нерастяжимой невесомой нитью длины l, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Одному из шариков сообщают скорость v_0, направленную вертикально вверх, против силы тяжести. Какой должна быть начальная скорость для того, чтобы нить все время оставалась натянутой, а нижний шарик не отрывался от горизонтальной поверхности? Модуль ускорения свободного падения равен g.

2. Пластины плоского конденсатора, имеющие форму квадрата со стороной a, расположены на расстоянии d друг от друга. Расстояние d пренебрежимо мало по сравнению с длиной стороны квадрата a. Конденсатор подключен к идеальному источнику постоянного тока с ЭДС U. Квадратая пластина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε, стороной квадрата a и толщиной d вставлена в пространство между пластинами конденсатора на расстояние x, $0 \le x \le a$. Найдите величину силы, втягивающей диэлектрик внутрь конденсатора. Объясните физическую причину возникновения такой силы.