Магистерская программа “Математика и математическая физика”

Решения задач специальной части олимпиадного задания

1. На концах тонкого невесомого нерастяжимого стержня длины l закреплены два небольших одинаковых шарика. В начальный момент эта конструкция стоит вертикально на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Нижнему шарику мгновенно сообщается скорость v_0 в горизонтальном направлении (то есть, параллельно поверхности).

а) При каких значениях скорости v_0 нижний шарик будет скользить, не отрываясь от плоскости?

б) Найдите модуль и направление скорости верхнего шарика в момент его удара о горизонтальную поверхность.

Решение. а) Пусть скорость v_0 достаточно велика и нижний шарик отрывается от поверхности. Перейдем с систему отсчета, движущуюся в горизонтальном направлении со скоростью $v_0/2$ туда же, куда направлена начальная скорость нижнего шарика. В этой системе отсчета центр масс шариков (середина стержня) будет свободно падать по вертикали с ускорением g, а стержень будет вращаться вокруг центра масс. Поскольку в этой системе оба шарика имеют начальную скорость $v_0/2$, направленную горизонтально и вращение вокруг центра масс происходит по окружности радиуса $r = l/2$, то шарики будут иметь центростремительное ускорение

$$a_c = \frac{v_0^2}{2l}.$$

Полное ускорение каждого шарика дается векторной суммой центростремительного ускорения и ускорения свободного падения g. Для нижнего шарика условие отрыва от плоскости состоит в том, что его *полное* ускорение направлено вверх, то есть $a_c < g$ и, следовательно, $v_0^2 > 2gl$. Таким образом, условие безотрывного скольжения нижнего шарика:

$$v_0^2 < 2gl.$$

б) Вопрос о скорости верхнего шарика в момент удара о плоскость решается с помощью законов сохранения энергии и импульса. Сразу после удара система получает горизонтальный импульс mv_0, который в дальнейшем сохраняется, поскольку никакие внешние силы в горизонтальном направлении на систему не действуют (поверхность абсолютно гладкая). В момент удара о поверхность скорость верхнего шарика имеет вертикальную составляющую v_y и горизонтальную составляющую v_x. Но так как стержень нерастяжим, скорость второго шарика в горизонтальном направлении в этот момент также должна быть равна v_x. Вертикальной составляющей вектор скорости второго шарика не имеет, так как он скользит по горизонтальной поверхности. Поэтому закон сохранения полного импульса системы в горизонтальном направлении сразу дает, что $v_x = v_0/2$. Запишем закон сохранения механической энергии системы для начального момента и момента удара верхнего шарика о плоскость:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} + \frac{mv_y^2}{2}.$$

Отсюда находим вертикальную составляющую скорости верхнего шарика в момент удара о плоскость:

$$v_y^2 = 2gl + \frac{v_0^2}{2}.$$

Модуль полной скорости верхнего шарика $v^2 = v_x^2 + v_y^2$:

$$v^2 = \frac{3}{4}\, v_0^2 + 2gl,$$

угол наклона φ вектора полной скорости к горизонтальной поверхности дается выражением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \sqrt{2 + \frac{8gl}{v_0^2}}.$$

2. Пластины плоского конденсатора, имеющие форму квадрата со стороной a, расположены на расстоянии d друг от друга. Расстояние d пренебрежимо мало по сравнению с длиной стороны квадрата a. Конденсатор подключен к идеальному источнику постоянного тока с ЭДС U. Квадратая пластина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε, стороной квадрата a и толщиной d вставлена в пространство между пластинами конденсатора на расстояние x, $0 \le x \le a$. Найдите величину силы, втягивающей диэлектрик внутрь конденсатора. Объясните физическую причину возникновения такой силы.

Решение. Пусть пластина диэлектрика вдвинута на расстояние x, как указано в условии. В этом положении частично заполненный диэлектриком конденсатор может рассматриваться как два параллельно соединенных конденсатора C_1 и C_2 с пластинами размером соответственно $x \times a$ (полностью заполненного диэлектриком) и $(a - x) \times a$ (полностью пустого). Емкость такого конденсатора дается выражением

$$C(x) = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\,(a + (\varepsilon - 1)x).$$

Конденсатор подключен к источнику тока U и обладает запасом электростатической энергии $W(x) = C(x)U^2/2$. При бесконечно малом перемещении пластины на расстояние dx заряд конденсатора изменяется на величину $dQ = UdC = UC'(x)dx$. Поскольку этот дополнительный заряд проходит через источник, то ЭДС источника совершает работу $dA_U = UdQ$. Энергия конденсатора изменяется на величину $dW(x)$, и, наконец, искомая сила F, действующая на диэлектрик, совершает работу $dA_F = F(x)dx$. Закон сохранения энергии в системе выражается равенством:

$$dA_U = dW(x) + F(x)dx \quad \Rightarrow \quad u^2C'(x) = \frac{U^2C'(x)}{2} + F(x).$$

Отсюда для силы F получаем выражение

$$F(x) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2\,\frac{a}{2d},$$

сила не зависит от величины x. Физическая причина возникновения этой силы заключается в краевых эффектах поля в конденсаторе: на краях пластин поле не однородно, в частности, не направлено перпендикулярно пластинам. Поэтому эклетростатическая сила, действующая на поляризационные заряды на поверхности диэлектрика, имеет компоненту, направленную *вдоль* пластины внутрь конденсатора — возникает эффект втягивания диэлектрика в конденсатор. Заметим, что хотя краевыми эффектами пренебергают при вычислении, например, энергии конденсатора (это законно в силу условия малости расстояния между пластинами d по сравнению с их размером a), для объяснения эффекта втягивания диэлектрика краевые эффекты — решающий фактор и пренебрегать ими нельзя.