Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2017 г.
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

ОБЩАЯ ЧАСТЬ / GENERAL SECTION

1. Определите значения параметров a и b, для которых следующий интеграл существует в смысле главного значения и равен нулю:

1. Determine values of real parameters a and b for which the following integral has the Cauchy principal value zero:

$$V.p. \int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{dx}{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x} = 0.$$

Ответ: $a = 0, b \neq 0$.

Решение. $a, b \neq 0$ одновременно из области определения.

Случай $b = 0, a \neq 0$ не возможен, поскольку в указанном интервале функция непрерывна и принимает строго положительные значения.

Случай $a = 0$ удовлетворяет условию задачи, поскольку функция $\frac{1}{b \sin x}, b \neq 0$ является нечетной, и интеграл от нее в главном значении равен 0.

Пусть $a, b \neq 0$. Сделаем замену

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}\cdot dx,\ c = \sqrt{a^2+b^2}, \frac{c}{|\ a\ |} \geqslant 1 > 0, \operatorname{tg}\frac{\pi}{16} = d \in (0;1),$$

откуда интеграл переписывается в виде:

$$\int\limits_{-d}^{d} \frac{dt}{2a(1-t^2)+4bt} = \frac{-1}{2a}\int\limits_{-d}^{d} \frac{dt}{t^2 - \frac{2b}{a}t - 1} = \frac{-1}{2a}\int\limits_{-d}^{d} \frac{dt}{(t-\frac{b}{a})^2 - \frac{b^2}{a^2} - 1} = \frac{-1}{2a}\cdot\frac{1}{\frac{2c}{|a|}}\left(\ln\left|\frac{-\frac{b}{a}+d-\frac{c}{|a|}}{-\frac{b}{a}+d+\frac{c}{|a|}}\right| - \ln\left|\frac{-\frac{b}{a}-d-\frac{c}{|a|}}{-\frac{b}{a}-d+\frac{c}{|a|}}\right|\right) = 0.$$

При условии, что интеграл существует в главном значении, приравняем его к нулю, тогда под логарифмом после упрощения должна оказаться 1:

$$\left|\frac{((-\frac{b}{a})^2 - (d - \frac{c}{|a|})^2)}{((-\frac{b}{a})^2 - (d + \frac{c}{|a|})^2)}\right| = 1,$$

$$4\frac{c}{|\ a\ |}d = 0,\ \text{если модуль раскрывается со знаком } + \text{ },$$

$$\frac{c^2-b^2}{a^2} = -d^2,\ \text{если модуль раскрывается со знаком - },$$

что не выполняется в обоих случаях.

Критерии №1:

0-1 – Есть выкладки к решению.

2 – рассмотрены случаи $a = 0$ и $b = 0$. Есть попытка сделать замену через вспомогательный аргумент.

3 – сделана тригонометрическая замена через тангенс половинного угла, интеграл сведен к дробно-рациональному.

4 – посчитана первообразная и подставлены значения, с учетом нечетности синуса/тангенса относительно возможной точки разрыва.

5-7 – Вычислен определенный интеграл, есть избавление от логарифма при решении задачи. Решение не завершено.

8-10 – Вычислен определенный интеграл, сделан вывод, обосновано отсутствие других решений.

За решение, ссылающееся на (необходимость - не верно) достаточность нечетности подынтегральной функции ставится не более 3 баллов.

Для обоснования необходимости надо было обратить внимание на малую длину интервала, который целиком укладывается между argmax и argmin, между которыми синус меняет монотонность не более 1 раза, и доказать утверждение о том, что в этой задаче нечетность функции под интегралом будет необходимым условием (доказано в 3 решениях).

2. Решите матричное рекуррентное отношение

2. Solve the matrix recurrent relation

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_{n-1},\ A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишите точные формулы для коэффициентов A_n.

Provide explicit formulae for coefficients of A_n.

Ответ: $A_n = \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

Решение. Коротко тут.

Легко доказать, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix},$$

откуда легко выводится формула для

$$A_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Вывод формулы n-го числа Фибоначчи см. "Лекции по дискретной математике А.В. Чашкин или тут.

Критерии №2:

0-1 – Есть выкладки к решению.

2 – есть упоминание чисел Фибоначчи. Ответ оставлен в виде степени матрицы из условия.

3 – выписаны рекуррентные соотношения на числа матрицы.

3-4 – ставится за попытку диагонализации матрицы с переходом в базис из собственных векторов и вычисления степени матрицы, при условии, что результирующее произведение затем не упрощается.

4 – рассмотрены и доказаны по индукции рекуррентные уравнения, нет вывода формулы для чисел Фибоначчи.

5-7 – выведены от 1 до 3 элементов результирующей матрицы как формулы от числа n. Оценка зависит от количества упрощений при выписывании рекуррентных соотношений на коэффициенты матрицы.

6-7 – Выведены 4 элемента, но решение не учитывает соотношения $A_{21} = A_{12}$. Большое количество не упрощенных вычислений.

8-10 – Вычислены все коэффициенты матрицы, решение рекуррентного соотношения доказано и есть формула в явном виде, все коэффициенты упрощены, матрица записана через числа Фибоначчи.

3. Каждый житель страны Оз имеет одну из трех профессий: A, B, C. Дети отцов, имеющих профессии A, B, C, сохраняют профессии отцов с вероятностями $1/5$, $2/5$, $3/5$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Текущее поколение имеет следующее распределение профессий:
профессию A имело 20% жителей, B — 30%, C — 50%. Найдите предельное распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

3. Every citizen in the land of Oz has one of three professions: A, B, C. Children of fathers who have a profession A, B, C, keep the profession of their fathers with the probabilities of $1/5$, $2/5$, $3/5$, respectively, and if they choose not to have the same profession, then with equal probabilities they select any of the other two professions. The current generation has the following professions distribution:
A — 20 % , B — 30 %, C — 50 %.
Find the limit distribution of professions that will no longer changing over generations.

Ответ: $\{\frac{300}{13}\%, \frac{400}{13}\%, \frac{600}{13}\%\} \approx \{23\%, 31\%, 46\%\}$.

Решение. Процесс выбора профессий описывается Марковской цепью с матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 3/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix},\ \pi = (0.2, 0.3, 0.5).$$

Есть два решения этой задачи:

1. У Вас есть стохастическая матрица, к которой применима теорема Фробениуса о наличии стационарной точки Марковского процесса, а само распределение ищется как левый собственный вектор матрицы P: $(1/2; 2/3; 1)$ + нормировка.

2. Требуется найти $P^* = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi \cdot P^n$.

Собственные числа матрицы P: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{10}, \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{10}$, причем последние два по модулю меньше 1.

Все собственные числа различны, а значит матрица диагонализируема, C - матрица из собственных векторов, при этом собственному числу 1 соответствует собственный вектор $(1; 1; 1)^t$. См. вычисление. Тогда

$$P = C \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$$

$$P^* = \lim_{n\to+\infty} \pi\cdot P^n = \lim_{n\to+\infty} \pi\cdot C\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n \cdot C^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \pi\cdot C\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}\cdot C^{-1} = \pi\cdot C\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot C^{-1}.$$

$$P^* = \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C^{-1} = \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C^{-1} = (C^{-1})_1 = (3/13; 4/13; 6/13),$$

поскольку сумма элементов π равна 1, а произведение двух последних матриц в предпоследней выкладке дает 3 одинаковых строки матрицы, обратной к матрице собственных векторов.

Критерии №3:

Решение 1: 0-1 – Есть выкладки к решению.

2 – есть упоминание Марковских цепей.Есть доказательство существования стационарной точки через теорему Фробениуса.

2-3 – есть попытка вычисления собственного вектора, но от неправильной или транспонированной матрицы. Есть попытка записать рекуррентные соотношения.

4-5 – вычисление собственного вектора с ошибкой при правильно записанной матрице.

6-7 – попытка посчитать левый собственный вектор, содержащая арифметическую ошибку на этапе нормировки и обосновать решение.

8-10 – верное решение с обоснованием.

Решение 2:

0-1 – Есть выкладки к решению.

Все следующие баллы начисляются только при условии, что в решении присутствует указание на то, зачем нужна диагонализация и почему она помогает решить задачу.

2 – найдены собственные числа матрицы. Также ставится за вычисление распределения на втором году или попытку вычислить второй-третий год и обосновать предельный переход малой разницей в значениях.

3 – обосновано, что матрица диагонализируема.

4 – найдены собственные векторы матрицы.

5-6 – найдена обратная к матрице перехода и есть переход к пределу.

6-7 – посчитано предельное значение в произведении, ответ упрощен.

8-10 – проведены выкладки, приводящие к решению задачи с переходом к пределу в диагональной компоненте, при этом все вычисления корректны, и правильно описана интерпретация результирующей матрицы.

4. На n табличках, выложенных по кругу, записаны числа, каждое из которых равно 1 или -1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел ($n \in \mathrm{N}, n > 3$), если за один вопрос разрешено узнать произведение чисел на

(1) любых трех табличках?
(2) любых трех табличках, лежащих подряд?

4. Each of n tablets lined on a circle is marked by a number 1 or -1. What is the minimum number of questions you should ask to determine the product of all n numbers ($n \in \mathrm{N}, n > 3$), if one question is allowed to know the product numbers of

(1) any three tablets?
(2) any three tablets placed in a row?

Ответ: (1) $N = \frac{n}{3} + (n \mod 3)$, $n > 4$; если $n = 4$, то $N = 4$. (2) $N = n$, когда $n \not\vdots 3$; $N = \frac{n}{3}$, когда $n \vdots 3$.
(автор: Ионин Ю.И., МЦНМО)

Решение. Обозначим записанные на табличках числа через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а искомое число вопросов за N. Вопрос (1)

Заметим, что каждое из чисел x_i должно войти хотя бы в одно из произведений, значения которых мы выясняем, задавая наши вопросы, ибо в противном случае, изменив знак у числа, записанного на неиспользованной карточке, мы изменим знак произведения всех чисел, сохранив при этом прежними ответы на все заданные вопросы. Отсюда следует, что $N \geqslant \frac{n}{3}$.

Если $n = 3k$, то k вопросов достаточно, поскольку достаточно посчитать произведение на последовательных не пересекающихся тройках и перемножить результат. Если $n = 3k+1$, то докажем, что $N = k+1$. Рассмотрим $(k+1)$ произведений

$$x_1x_2x_3,\ x_1x_4x_5,\ x_1x_6x_7,\ x_8x_9x_{10},\ \ldots,\ x_{3k-1}x_{3k}x_{3k+1}.$$

В этих произведениях все числа, кроме x_1 , участвуют по одному разу, а число x_1 — три раза. Так как $x_1^3 = x_1$, то произведение полученных результатов равно произведению всех написанных на карточках чисел.

Случай $n = 4$ мы разберем ниже. В этом случае (1) не отличается от (2).

Если $n = 3k+2$, то снова $N \geqslant k+1$. Докажем, что k+1 вопросов недостаточно. В $k+1$ произведений входят $3k+3 = n+1$ сомножителей; но так как каждое из n написанных на карточках чисел должно выйти хотя бы в одно из этих произведений, то одно число (назовем его x) входит в два произведения: xyz и xuv, а каждое из остальных чисел входит ровно в одно произведение. Но, заменив числа x , y и u , мы не изменим ни одного из полученных ответов, изменив при этом произведение всех написанных на карточках чисел; значит, на основании полученных $k+1$ ответов нельзя определить это произведение.

Произведение всех написанных на карточках чисел можно найти, перемножив произведения

$$x_1x_2x_3,\ x_1x_2x_4,\ x_1x_2x_5,\ x_6x_7x_8,\ x_9x_{10}x_{11},\ \ldots,\ x_{3k}x_{3k+1}x_{3k+2},$$

и задав при этом $k+2$ вопроса.

Вопрос (2)

Если $n = 3k$, то решение совпадает с вопросом (1).

Пусть n не делится на 3. Вопросы можно задавать о значениях лишь таких n произведений:

$$x_1x_2x_3,\ x_2x_3x_4,\ \ldots,\ x_{n-2}x_{n-1}x_n,\ x_{n-1}x_nx_1,\ x_nx_1x_2.$$

Задав все n вопросов, мы узнаем куб произведения всех чисел, а значит, и само произведение. Покажем, что $n-1$ вопросов для нахождения произведения чисел недостаточно. Задав $n-1$ вопросов, мы будем знать все произведения, кроме одного. Так как мы могли начать нумерацию табличек с любой из них, то можно считать, что не задавался вопрос о значении произведения $x_1x_2x_3$.

Пусть $n = 3k+1$. Заменив на противоположные числа x_2 и x_3 , x_5 и x_6 , ... , x_{3k-1} и x_{3k} , а также число x_1, мы изменим знак всего произведения, не меняя ответы на выбранные n-1 вопросов.

Пусть $n = 3k+2$. Заменяя на противоположные числа x_4 и x_5 , x_7 и x_8 , x_10 и x_11 , ... , x_{3k+1} и x_{3k+2} и x_2, мы изменим знак всего произведения, не меняя ответов на $n-1$ вопрос.

Критерии №4:
Вопрос (1)
0-1 – Есть выкладки к решению.
2 – есть решение при n кратном 3 (включая аналогичный случай (2)).
3-4 – есть разбор остальных случаев по остатку от деления на 3 с получением правильного ответа.
5 – доказаны нижние оценки.
6 – в дополнение, разобран случай 4 табличек.

Вопрос (2)

0-1 – Есть выкладки к решению. Приведен пример, как посчитать за n.

2-4 – есть разбор случаев по остатку от деления на 3 и есть доказательство нижней оценки n. Решение обосновано, доказаны нижние оценки.

Сводные критерии №4 (председатель жюри):

Не больше 2 баллов ставится за ответ только для n кратного 3 в обоих пунктах.

Не более 3 баллов ставилось за рассмотрение остатков от деления и получение неверных ответов в (1).

Не более 4 баллов ставилось за 1 правильный ответ при остатке 1 или 2 от деления на 3.

5-7 баллов ставилось за правильно решенный первый пункт и попытки получить ответ в пункте (2) при n не кратном 3, но без доказательства нижней оценки n.

8-10 ставилось за полное решение, включая доказательство от противного в пункте (2) и разбор случая 4 чисел.

5. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ — независимая выборка из нормального распределения с неизвестными средним и дисперсией. Найдите оценку параметров распределения методом максимального правдоподобия. Модифицируйте точечную оценку, чтобы она стала несмещенной и состоятельной.

5. Let $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ be independent sample from a normal distribution with unknown mean and variance. Find the parameters of this distribution using the maximum likelihood estimation method. Modify the resulting point estimation to make it unbiased and consistent.

Ответ: Выборочное среднее, выборочная дисперсия; выборочное среднее, исправленная выборочная дисперсия.

Решение. См. оценки максимального правдоподобия.

Критерии №5:

0-1 – Есть выкладки к решению.

2 – есть правильно написанная функция плотности нормального распределения; правильно написана функция плотности выборки и функция правдоподобия.

3 – записаны условия для нахождения оценки и посчитаны производные.

4 – найдено решение уравнений для равенства нулю частных производных. Доказано свойство экстремальности (Гессиан, или знаки производных; без этого - минус балл)

5-6 – найдена оценка для μ; найдена оценка для σ^2. Установлена несмещенность μ и смещенность σ^2.

7 – доказано (сформулировано свойство ОМП), что оценки являются состоятельными.

8-10 – проверена смещенность оценки дисперсии и построена несмещенная оценка, проверена ее состоятельность, все решение обосновано.

За указание ответа к задаче без метода ОМП — максимум 3 балла. За отсутствие вычислений в явном виде производной или функции плотности выборки – не больше 2 баллов.

За недоказанность свойств (не)смещенности – не больше 6 баллов. За необоснованность состоятельности, включая несмещенную оценку дисперсии – 7 баллов.

6. Решите дифференциальное уравнение для $x > 0$

6. Solve the differential equation for $x > 0$

$$xy' = 2y + x^3 \ln x,\ y(1) = 0.$$

Ответ: $y(x) = x^3 \ln x - x^3 + x^2$.

Решение. Перепишем уравнение с учетом того, что $x \neq 0$:

$$y' = 2\frac{y}{x} + x^2 \ln x$$

Решим однородное уравнение:

$$y \equiv 0, \text{ или}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x},$$
$$\ln \mid y \mid = 2 \ln x + E,$$
$$y = \pm e^E x^2.$$
$$\text{Итого: } y = Cx^2.$$

Воспользуемся методом вариации постоянной, который применим для линейного уравнения:

$$C'(x) \cdot x^2 = x^2 \ln x,$$
$$C(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + D.$$

Подставляя, получаем, что

$$y(x) = x^2 \cdot (x \ln x - x + D).$$

Остается подставить начальные условия и найти, что $D = 1$.

Критерии №6:

0-1 – Есть выкладки к решению.

2 – определен тип уравнения, предложен метод решения.

3 – найдено решение однородного уравнения, не забыта констант, записана вариация постоянной и обоснован метод.

4 – частное решение найдено с ошибкой.

5-7 – найдено частное решение, в процессе вычислений присутствуют арифметические ошибки или неэквивалентные переходы..

8-10 – подставлены начальные условия, найдена константа и получен верный ответ, все решение обосновано.

За лишнюю замену $x = e^t$ вычитался балл.

За замены в виде $y = x^\alpha g$ ставилось не выше 6-7 баллов, поскольку ограничивался класс решений.

По 1 баллу вычиталось за не рассмотрения случая $y \equiv 0$ (только для однородного!!!), за отсутствие модулей под логарифмом для y при решении однородного уравнения, и за отсутствие перехода от однородного уравнения к интегрированию и получению решения однородного уравнения (за последнее при правильном решении оценка могла быть снижена до 7 баллов).

Отсутствие умножения решений при замене $y = uv$, или оставленная константа при правильных вычислениях оценивались не более, чем в 6-7 баллов.

Сводные критерии №6 (председатель жюри): За угадывание частного решения или решения всей задачи ставилось от 1-3 баллов, и в отдельных случаях – только 1 балл.

Написание решения к задаче подразумевает, что абитуриент владеет методами решения линейных ОДУ 1-го порядка для произвольных функций из C^1, и в состоянии продемонстрировать эти навыки на практике.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL SECTION

Среди следующих задач решите не менее четырех. В зачет пойдут четыре лучших решения.

Solve at least four of the following problems. Up to four best solutions will be graded.

7. Вычислите $\int\limits_0^2 g(t)\mathrm{d}t$, где $g(t)$ — функция обратная к $f(x) = x^3 + x$.

7. Compute $\int\limits_0^2 g(t)\mathrm{d}t$, where $g(t)$ is the inverse function for $f(x) = x^3 + x$.

Ответ: 1.25.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает, так как

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, уравнение $t = f(x)$ определяет однозначную непрерывную монотонную функцию $x = g(t)$ (теорема об обратной функции).

Сделаем в интеграле замену $t = f(x)$:

$$\int_0^2 g(t)\,dt = \left\{ t = f(x),\ dt = f'(x)dx,\ g(t) = g(f(x)) = x, \begin{array}{c|c} t & x \\ \hline 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^1 x\ f'(x)\ dx = \int_0^1 x(3x^2+1)\ dx = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \Bigg|_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Замечание: Это же решение можно было получить, продифференцировав $x = g^3(x) + g(x)$ и выразив производную $g(x)$: $1 = g'(x) \cdot (3g^2(x) + 1)$; после чего под интегралом умножить и поделить на $g'(x)$:

$$\int_0^2 \frac{g(t)}{g'(t)} \cdot g'(t)\,dt = \int_0^1 3g^3 + g\,dg = \cdots$$

Критерии №7:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – отмечено существование обратной функции, но интеграл не вычислен. Есть попытка сделать замену или вычислить интеграл.

3 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено. Например, приведена формула

$$\int_0^2 g(t)\,dt = \int_0^1 x(3x^2+1)\ dx,$$

и вычислен соответствующий интеграл, но полностью отсутствуют пояснения.

4 – То же, что и в пункте 3, но в решение или обосновании допущены существенные ошибки, например, с расстановкой пределов интегрирования.

5-7 – Правильное решение, но допущены ошибки при вычислении интеграла или неточности в обосновании решения.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях, есть обоснования существования обратной функции.

За отсутствие указания на монотонность f и обоснование существования обратной функции вычиталось 2 балла.

8. Пусть $x = x(t)$ — наименьший из положительных корней уравнения $\cos(tx) = \frac{1}{2} + x^2$.
Вычислите предел $\lim\limits_{t\to+\infty} tx(t)$.

8. Let $x = x(t)$ be the least positive root of the equation $\cos(tx) = \frac{1}{2} + x^2$.
Find the limit $\lim\limits_{t\to+\infty} tx(t)$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Пусть $F = \cos(tx) - x^2$. Заметим, что на отрезке $x \in [0, \frac{\pi}{2t}]$ функция F — непрервная и монотонно убывает, $F = 1$ при $x = 0$ и $F = -\frac{\pi^2}{4t^2} < 0$ при $x = \frac{\pi}{2t}$. Следовательно, на отрезке $x \in [0, \frac{\pi}{2t}]$ при любом $t > 0$ существует единственный корень уравнения $F = 1/2$.

Таким образом, для первого положительного корня рассматриваемого уравнения мы доказали неравенство

$$0 < x(t) < \frac{\pi}{2t}.$$

Следовательно, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Исходное уравнение можно переписать в виде

$$tx(t) = \arccos\left(\frac{1}{2} + x^2(t)\right).$$

Учитывая непрерывность арккосинуса получаем:

$$\lim_{t\to+\infty} tx(t) = \lim_{t\to+\infty} \arccos\left(\frac{1}{2} + x^2(t)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Критерии №8:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – без обоснования указано, что $x \to 0$.

2-3 – используется разложение косинуса в нуле, что не верно при условии существования предела. используются другие необоснованные и неверные решения.

3-5 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено. Студент вычисляет предел корректно, но использует то, что $x \to 0$ без обоснования, $x \to 0$ обосновывается лишь графически. Также, если студент все сделал верно, но ошибся в вычислениях и получил неверный ответ. Есть попытка перейти к пределу, но нет обоснования непрерывности косинуса и ответ посчитан не верно.

6-7 – Правильное решение, с доказательством стремления $x \to 0$, и ответ, но допущены арифметические ошибки, или правильный ответ, но есть неточности в обосновании решения.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях.

За подстановку $x \to 0$ с правильным подсчетом абитуриент получает не выше 7 баллов, за принципиально неправильную подстановку или необоснованные асимптотики/разложения – не выше 3-4 баллов.

9. Докажите неравенство

9. Prove the inequality

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} < 1,$$

при $x^2+y^2+z^2=1$.

if $x^2+y^2+z^2=1$.

Ответ: $\square$.

Решение. Обозначим определитель за $f(x,y,z)$. Найдем наибольшее значение функции f на единичной сфере $x^2+y^2+z^2=1$ методом множителей Лагранжа. Вычисляя определитель, получаем

$$f=(x-y)(x-z)(y-z)=yz^2-zy^2-xz^2+zx^2+xy^2-yx^2.$$

Составим функцию Лагранжа

$$L=f+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

Критические точки функции f на сфере можно найти решая уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y^2-z^2+2xz-2xy+2\lambda x=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=z^2-x^2+2xy-2yz+2\lambda y=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=x^2-y^2+2yz-2xz+2\lambda z=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0, \tag{4}$$

Мы ищем решения системы при $x\neq y\neq z$, поскольку функция $f\equiv 0$ при совпадении любой пары ее аргументов.

Складывая (1) + (2) + (3), получаем

$$\lambda(x+y+z)=0.$$

Пусть $\lambda=0$. Тогда (1) принимает вид

$$(z-y)(z+y)=2x(z-y) \quad\Rightarrow\quad z=2x-y.$$

Аналогично в (2)

$$(x-z)(x+z)=2y(x-z) \quad\Rightarrow\quad z=2y-x.$$

Приравнивая выражения для z, получаем противоречие: $x=y$, следовательно, $\lambda\neq 0$.

Таким образом $z=-x-y$. Уравнение (3) принимает вид:

$$x^2-y^2-2(x+y)(y-x+\lambda)=0 \quad\Rightarrow\quad (x+y)(3x-3y-2\lambda)=0.$$

Предположим, что $y=-x$, следовательно $z=0$. Уравнение (1) принимает вид

$$x^2+2x^2+2\lambda x=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2}{3}\lambda.$$

Получили два решения

$$x=-\frac{\sqrt2}{2},\ y=\frac{\sqrt2}{2},\ z=0,\ \lambda=\frac{3\sqrt2}{4},\ f=-\frac{\sqrt2}{2};$$
$$x=\frac{\sqrt2}{2},\ y=-\frac{\sqrt2}{2},\ z=0,\ \lambda=-\frac{3\sqrt2}{4},\ f=\frac{\sqrt2}{2};$$

Остается разобрать случай $x+y\neq 0$. Тогда $y=x-2\lambda/3$ и $z=2\lambda/3-2x$. Уравнение (2) принимает вид:

$$(2\lambda/3-x)x=0.$$

Разбирая случае $x=0$ и $x\neq 0$ видим, что полученные решения соответствуют циклическим перестановкам набора (x,y,z) для уже найденных решений.

Получаем, что максимум f при $x^2+y^2+z^2=1$ равен $\sqrt2/2<1$, что и требовалось доказать.

Критерии №9:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – вычислен исходный определитель (включая формулу Вандермонда). Предложен разбор различных случаев, который не приводит к доказательству неравенства (включая неверное утверждения о том, что разницы всех векторов на сфере по модулю меньше 1).

3 – предложен метод Лагранжа или переход к сферическим координатам

4-5 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено. Например, если студент предложил верный метод решения, но запутался в решении системы уравнений, для поиска критических точек

6-7 – Правильное решение, но допущены неточности в обосновании решения. Например, разобраны не все случаи, то есть найдены не все критические точки.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях.

Критерии №9 (председатель жюри):

Решение через неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех квадратов разностей засчитывалось на 8-10 при правильных выкладках, на 5-7 - при наличии неточностей или ошибок в доказательстве.

10. Пусть n — нечётное простое число. Найдите асимптотику числа решений уравнения

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}) \cdot (x_{2n+1} + x_{2n+2} + \cdots + x_{4n}) = n^2$$

в которых значение каждой переменной принадлежит множеству $\{0, 1\}$. Используйте формулу Стирлинга без доказательства: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

10. Let n be an odd prime. Find the the asymptotic behavior of the number of solutions for the equation

where each variable takes value from the set $\{0, 1\}$. Use Stirling's formula without proof: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ответ: $\frac{16^n}{\pi n}$.

Решение. При $n \geq 3$ имеем неравенство $2n < n^2$, поэтому каждая из скобок в произведении должна равняться n. Обеспечить это можно, выбрав по произвольному подмножеству переменных мощности n в каждой скобке и положив их равных единице. Точное значение числа решений, следовательно, равно: $\binom{2n}{n}^2$. Расписав биномиальный коэффициент через факториалы и применив формулу Стирлинга, получаем

$$\binom{2n}{n}^2 = \frac{(2n!)^2}{(n!)^4} \sim \frac{4\pi n(2n/e)^{4n}}{(2\pi n)^2(n/e)^{4n}} = \frac{16^n}{\pi n}.$$

Критерии №10:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – написаны некоторые комбинаторные тождества на число решений, указано, чему должна быть равна каждая скобка, обоснована асимптотика.

3 – попытк аобосновать разложение через простота числа n.

4 – Написана формула для вариантов составить скобку вместе с обоснованием через асимптотику.

5-6 – Написаны формулы через биномиальные коэффициенты и подставлена формула Стирлинга через эквивалентность.

7 – Правильное решение, но допущены ошибки при применении формулы или неточности в обосновании решения.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях, с полным обоснованием.

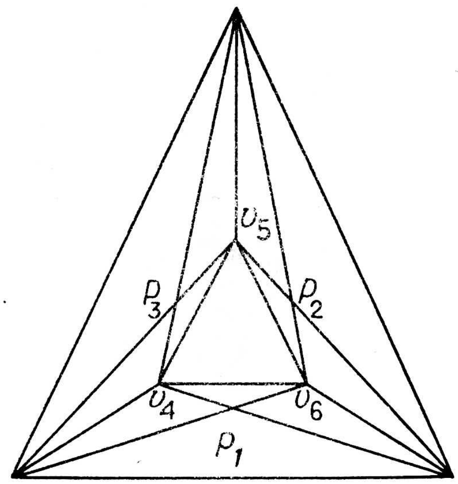
Баллы вычитались за забытое возведение в квадрат или отсутствие обоснования равенства n каждой из скобок – не выше 7 баллов.

11. Планарный граф — это граф, который можно изобразить на плоскости, так, чтобы линии, изображающие рёбра, не пересекались. Полный граф — это граф, в котором любые две вершины соединены ребром. Известно, что в любом планарном графе число рёбер не превосходит $(3n-6)$, если $n \geqslant 3$ — число вершин. Найдите минимальное количество скрещиваний рёбер, которое можно достичь в изображении на плоскости полного графа на шести вершинах.

11. Planar graph is a graph that can be drawn on a plane without edge intersection. Complete graph is a graph in which any two vertices are adjacent. It is known that any planar graph with $n \geq 3$ vertices has not more than $(3n-6)$ edges. Determine the minimal number of edge intersections that can emerge when drawing complete graph on six vertices.

Ответ: 3.

Решение. Изображение графа с тремя пересечениями на рисунке:



Докажем, что менее трёх пересечений сделать не получится. Разместим граф на плоскости так, чтобы число пересечений было равно t. Удалим в каждом пересечении одно из двух пересекающихся ребер, чтобы от пересечения избавиться. Получаем планарный граф на шести вершинах, у которого число рёбер не меньше $\binom{6}{2}-t = 15-t$. Используя соотношение для планарных графов между числом вершин и рёбер, получаем $15-t \leq 3\cdot 6-6$, откуда сразу вытекает неравенство $t \geq 3$.

Замечание: также в этой задаче работает такая идея: поставим на каждую точку пересечения новую вершину графа, чтобы от пересечения избавиться. В результате получается планарный граф на $(6+t)$ вершинах с $(15+2t)$ рёбрами.

Критерии №11:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – посчитано число ребер полного графа на 6 вершинах или максимальное число ребер в планарном графе на 6 вершинах.

3-5 – посчитана нижняя оценка на число ребер в полном графе без некоторого числа ребер или без примера. При отсутствии упоминания оценки на число скрещиваний (разницу ребер в полном и планарном графах на 6 вершинах) балл снижался.

6-7 – Есть попытка нарисовать граф, но она не понятна, содержит больше 3 пересечений, или не объяснена, при условии что есть точная нижняя оценка.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях, с полным обоснованием.

Критерии №11 (председатель жюри):

За решение с нарисованным графом с 3 пересечениями дается не более 3-4 баллов, с большим числом пересечений - 1-2 балла.

За решение с 1 скрещиванием (общей точкой) для более чем 2 ребер ставилось не более 3 баллов, при отсутствии правильного решения с подсчетом количества попарных скрещиваний ребер.

12. Имеется три группы студентов: изучающие испанский, французский и китайский язык. В первых двух группах по пять студентов, в третьей — 205 студентов. Известно, что каждый из изучающих испанский знаком с каждым из изучающих французский, и что каждый из изучающих китайский, знаком по меньшей мере с тремя студентами в каждой из других групп. Докажите, что можно выбрать по три студента из каждой группы, так, чтобы среди выбранных девяти студентов любые два разноязычных студента были знакомы.

12. There are three groups of students, studying Spanish, French and Chinese languages respectively, five students in each of the first two groups, and 205 students in the third group. Each student in Spanish group knows each student in the French group. Each student in the Chinese group knows at least three students in each of the other two groups. Prove that one can choose three students from each of the groups in a way that among these nine students any pair of students that study different languages are acquainted.

Ответ: $\square$.

Решение. Будем для краткости вместо «студент, изучающий китайский» писать «К-студент». Аналогично будем писать «И-студент» и «Ф-студент».

Будем считать, что каждый К-студент знаком ровно с тремя И-студентами и тремя Ф-студентами (если знакомых больше, просто про них временно забудем).

Каждому К-студенту сопоставим ярлык, на котором записаны имена трёх его знакомых И-студентов и трёх знакомых Ф-студентов. То, что в принципе может быть на таком ярлыке, можно выбрать

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} = 100 \text{ способами.}$$

Всего К-студентов 205, и по принципу Дирихле найдутся как минимум $\lceil 205/100 \rceil = 3$ студента-китаеведа, которым приписаны в точности одинаковые ярлыки. Эти три К-студента вместе с соответствующими (общими по выбору!) знакомыми в И- и Ф-группах и будут искомой компанией из девяти человек.

Критерии №12:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – предложен алгоритм маркировки студентов или иной способ нумерации.

2-3 – предложено решение, не использующее числа 5, 5 и 205.

3-5 – получены комбинаторные тождества на число способов выбрать группы, но они не приводят к решению (4-5 ставится только при наличии содержательных идей, не доведенных до конца и формулы на число сочетаний). Предложены идеи решения через дольные графы, но нет логической обоснованности существования такого графа.

6-7 – найдены два китайца, который знакомы с 3 французами и 3 испанцами. Есть попытка доказать, что есть еще.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях, с полным обоснованием.

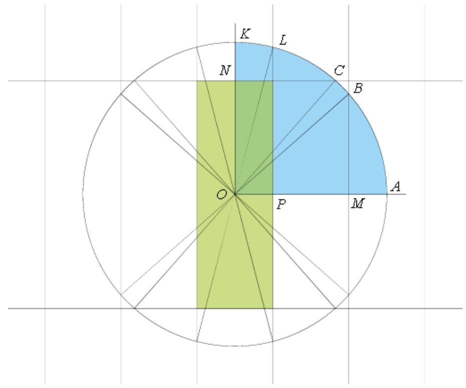
Не выше 7 баллов ставилось за рассуждения с “дробными” людьми. Также баллы в пределах 8-10 снижались при отсутствии указания на признак Дирихле, или других неточностях в обосновании.

13. В центре прямоугольного биллиардного стола длиной 360 × 120 см расположен биллиардный шар. По нему ударяют кием в случайном направлении. После удара шар останавливается, пройдя ровно 2.4 м. Найдите ожидаемое число отражений от бортов.

Ответ: $1 + \frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{3}{4} + \arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4}\right)$.

13. A ball is located in the center of a rectangular billiard table with dimensions 360 by 120 cm. The ball is hit in a random direction. After running the total distance of 2.4 m the ball stops. Find the expected number of reflections from the sides of the table.

Решение. Изобразим стол с ячейкой 3.6 м х 1.2 м. в формате развертки для описания всех отражений от бортов.



Центральный прямоугольник - стол, остальные прямоугольники - образы стола под действием закона о том, что угол падения равен углу отражения. В таком формате каждая траектория шара является прямой линией на развертке. Нам требуется построить развертку, содержащую круг радиусом 2.4 м с центром в центре стола O. Очевидно можно рассмотреть только четверть круга, то есть все направления, приводящие шар в одну из точек дуги AK.

Число пересечений линий развертки равно числу отражений от бортов. На рисунке видно, что пересечений два, если шар попадает на дугу AB или на дугу CL. Если шарик попадает на дугу BC или KL, то пересечение одно. Случай пересечения по углу не играет роли, поскольку точка имеет вероятностную меру 0.

Параметры так подобраны, что возможно либо 1 либо 2 отражения. Вероятность двух отражений равна

$$p_2 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CL}}{\pi/2} = \frac{\arccos\frac{3}{4} + \arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4}}{\pi/2},$$

вероятность 1 отражения равна $1 - p_2$.

Математическое ожидание числа отражения вычисляется по формуле:

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 1 + p_2 = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{3}{4} + \arccos\frac{1}{4} - \arcsin\frac{3}{4}\right)$$

Критерии №13:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – указано, что отражений от 1 до 2.

3-5 – предложена развертка или иной метод, позволяющий группировать углы по 1-2 отражениям.

6-7 – сделана содержательная попытка (считаются обратные тригонометрические функции) посчитать вероятности, но допущена ошибка.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях, с полным обоснованием.

14. Предложите эффективный алгоритм определения того, что данное натуральное число n — простое.

14. Propose a fast algorithm that answers the question if a given natural number n is prime.

Ответ: $\square$.

Решение. Решением могут служить решето Эратосфена до $\sqrt{n}$ со сложностью $O(n \ln \frac{1}{2} \ln n)$ (обратите внимание, не $O(\sqrt{n})$, как указывали многие, в виду необходимости учитывать сложность операции деления нацело) по времени и $O(n)$ по памяти, алгоритм Притчарда и его улучшения, улучшающие сложность по памяти и по времени до сублинейной.

Подразумевалось, что абитуриент напишет тривиальный переборный алгоритм, после чего попробует придумать его улучшение на основе вероятностного теста на простоту, таких как тест Рабина, и, конечно, тест Ферма, основанный на быстром возведении в степень по модулю и алгоритме Евклида.

Подробное описание с примером реализации можно посмотреть здесь. И хотя псевдопростых чисел Кармайкла бесконечно много, вероятностные тесты имеют асимптотику в виде полинома от $log(n)$ умножить на количество тестов, что делает их применимыми на практике.

Критерии №14:

0-1 – Абитуриентом предложены идеи решения задачи.

2 – дано определение простого/составного числа и предложен алгоритм, использующий определение, но не достаточно имплементированный. Нет псевдокода.

3 – описан вариант решета до n или решето до $\sqrt{n}$, но без имплементации.

4 – реализован один из вариантов решета, оценена сложность работы.

5-7 – предложен тест Ферма, но он заявлен как гарантированный алгоритм для проверки на простоту. Не реализовано быстрое возведение в степень или не найдены асимптотики работы теста.

8-10 – Правильное решение и полносью оформленный на псевдокоде алгоритм, с оценкой теоретической и вероятностной версии алгоритма по сложности (время, память), и полным обоснованием корректности.

Отдельно стоящий тест Ферма, выдаваемый за тест на простоту, оценивается не более чем в 4 балла.

За задачу могут вычитаться баллы в зависимости от степени неструктурированности или отсутствия пояснений, выкладок и комментариев к псевдокоду алгоритмов и/или структур данных, необходимых для его работы, включая уровень абстракции и работу с простыми типами данных.

Комментарий №14 (председатель жюри):

К сожалению, средний балл по задаче колеблется в районе 2-4 баллов, поскольку менее 10 абитуриентов вспомнили о вероятностном алгоритме или хотя бы упомянули его.

Сложность решета до $\sqrt{n}$ посчитана почти правильно также у менее, чем 10 человек.

Написание неэффективного решения, в том числе, не использующего дополнительную память, не может быть оценено более, чем в 4 (удовлетворительно).

За отсутствие попыток посчитать сложность алгоритма вычиталось 1-2 балла.