Математика **8 класс**

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. В ряд выписаны числа от 1 до 2011 в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки $+$ и $-$ так, чтобы значение полученного выражения было точным квадратом натурального числа?

2. Все клетки шахматной доски последовательно пронумерованы от 1 до 64 (в каждом ряду клетки нумеруются слева направо, в первом ряду — от 1 до 8, во втором — от 9 до 16 и т.д.). На доску поставили 8 ладей так, что никакие две не бьют друг друга. Найдите все значения, которые может принимать сумма номеров полей, занятых ладьями.

3. Эльфы считают шестизначное число красивым, если сумма первых трех цифр отличается от суммы последних трех цифр на целое число, кратное 11. Сколько существует красивых по-эльфийски шестизначных (от 100 000 до 999 999) чисел?

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 2, а его угол A равен $45°$. Вокруг треугольников ABC, BCD, CDA и DAB описали окружности с центрами K, L, M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

5. Можно ли на плоскости отметить 2013 точек так, чтобы любые три из них образовывали тупоугольный треугольник?

6. Имеется набор из нескольких одинаковых кубиков, каждая грань которых окрашена в черный и белый цвет. Известно, что если любые два кубика из набора положить на стол, то можно отличить один от другого по раскраске пяти видимых граней. Какое максимальное число кубиков может быть в наборе?

Ответы и указания

1. Ответ: можно.
Указание: расставьте знаки между числами $1, 2, ..., 7$ так, чтобы в сумме получилось 4. Остальные числа разбейте на четвёрки подряд идущих, и в каждой четвёрке $a, (a+1), (a+2), (a+3)$ расставляйте знаки так, чтобы сумма была равна 0. Например так: $+a-(a+1)-(a+2)+(a+3)=0$.

2. Ответ: 260.
Указание: Выберем произвольные две ладьи. Пусть первая ладья стоит в клетке (i, j) (i-й столбец, j-я строка), а вторая — в клетке (p, q). Переставим эти ладьи в клетки (i, q) и (p, j). От этого ладьи по прежнему не бьют друг друга, и сумма чисел в полях, занятых ладьями, не изменилась. Действуя таким образом, можно переставить все ладьи так, что они будут идти вдоль диаогнали, а значит сумма чисел в занятых ими полях будет равна $1+10+19+28+37+46+55+64 = 260$.

3. Ответ: 81819.
Пусть $\overline{abcdef}$ — красивое по-эльфийски число, т.е. $(a+b+c-d-e-f)\vdots 11$. Тогда согласно признаку делимости на 11 число $\overline{adbecf}$ делится на 11. Обратное тоже верно. Следовательно красивых по-эльфийски шестизначных чисел столько же, сколько шестизначных чисел, делящихся на 11. Наименьшее шестизначное число, делящееся на 11, равно 100001, наибольшее – 999999, а всего их $\frac{999999-100001}{11}+1=81819$.

4. Ответ: 2.
Указание: пусть O – точка пересечения диагоналей $ABCD$. Из теоремы о вписанных углах следует $\angle BLD = 2\angle BCD = 90° \Rightarrow BO = OL$. Кроме того $BO \perp OL$, т.к. L лежит на серединном перпендикуляре к BD.
Аналогичное верно для других вершин параллелограмма. Докажите, пользуясь этим, что параллелограмм $KLMN$ равен параллелограмму $ABCD$.

5. Ответ: можно.
Указание: можно например расположить все точки на окружности по одну сторону от её диаметра.

6. Ответ: 6.
Указание: всего существует 10 способов раскрасить грани куба в 2 цвета. Выпишите все эти 10 способов, и проанализируйте, какие раскраски с какими "не сочетаются" (т.е. не должны одновременно присутствовать в наборе.) Максимальное количество сочетающихся раскрасок получается, если выбрать раскраски с чётным числом белых граней.