Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников – 2018 г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации по направлению «Прикладная математика»

Профиль: «Прикладная математика» **КОД - 030**

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

Время выполнения задания – 240 мин., язык - русский.

Задача 1.

Рассмотрите задачу минимизации

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt$$

при ограничениях

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t),u(t),t) \text{ и } \psi(x(t_0)) = 0,\ \ \psi \in R^q$$

путем выбора управления $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ и $x(t_0)$.

Напишите необходимыми условиями экстремума (ответ обосновать).

Решение.

Образуем вспомогательный функционал $\overline{J}(x,u,t)$ прибавлением к исходному функционалу всех ограничений: дифференциального уравнения системы с некоторыми множителями (вспомогательной переменной) $\lambda(t)$ и условиями $\psi(x(t_0)) = 0,\ \ \psi \in R^q$, с векторным множителем γ:

$$\overline{J}(x(\cdot),u(\cdot)) = K(x(T)) + \gamma^T \psi(x(t_0)) + \int_{t_0}^{T} \{L(x,u,t) + \lambda^T(t)[f(x,u,t) - \frac{d}{dt}x(t)]\}dt.$$

Введем скалярную функцию $H(x,u,\lambda,t)$ (Гамильтониан):

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T(t) f(x,u,t).$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части выражения вспомогательного функционала, получим:

$$\overline{J}(x(\cdot),u(\cdot)) =$$

$$= K(x(T)) + \gamma^T \psi(x(t_0)) + \lambda^T(t_0)x(t_0) - \lambda^T(T)x(T) + \int_{t_0}^{T} \{H(x,u,\lambda,t) + \left\{\frac{d}{dt}\lambda^T(t)\right\} x(t)\}dt.$$

Найдем вариацию критерия качества $\overline{J}(x,u,t)$, вызванную вариациями по управлению *u(t)*:

$$\nabla \overline{J}(x(\cdot),u(\cdot)) = \left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)} - \lambda^T(T)\right\} \nabla x(T) + \left[\lambda^T(t_0) + \gamma^T \psi(x(t_0))\right] \nabla x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left\{\left[\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x(t)} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t)\right] \nabla x(t) + \frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} \nabla u(t)\right\} dt.$$

Чтобы не определять непосредственно вариации $\nabla x(T)$, $\nabla x(t)$ и $\nabla x(t_0)$, вызванные вариациями $\nabla u(t)$, и исключить влияние вариаций $\nabla x(t)$, $\nabla x(t_0)$ и $\nabla x(T)$ на вариацию критерия $\nabla \overline{J}(x(\cdot),u(\cdot))$, выберем множитель $\lambda(t)$ и $\lambda(t_0)$ таким образом, чтобы сомножители при $\nabla x(t)$, $\nabla x(T)$ и $\nabla x(t_0)$ обращались в нуль. Тогда переменная $\lambda(t)$ будет определяться решением дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x.u.\lambda,t)}{\partial x(t)}\right\}^T = -\left\{\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T \lambda(t) - \left\{\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x(t)}\right\}^T$$

с граничными условиями:

$$\lambda(t_0) = -\gamma^T \psi(x(t_0)) \quad ,\lambda(T) = \left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\right\}^T .$$

Уравнение для первой вариации принимает вид

$$\nabla\overline{J}(x(\cdot),u(\cdot)) = +\int_{t_0}^{T}\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)}\nabla u(t)\right\}dt \quad .$$

Это выражение будет равно нулю при наперед не заданных вариациях $\nabla u(t)$ в случае, если $\dfrac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial u(t)} = 0$.

Поэтому необходимые условия минимума функционала

$$J(x,u) = K(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt, \; t \in [t_0, T]$$

при заданных ограничениях $\dfrac{d}{dt}x(t) = f(x(t),u(t),t)$ и $\psi(x(t_0)) = 0, \;\; \psi \in R^q$

имеют вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}H(x,u,\lambda,t)\right\}^T, \;\; \frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}H(x,u,\lambda,t)\right\}^T, \;\; \frac{\partial}{\partial u}H(x,u,\lambda,t) = 0$$

$$\lambda(t_0) = -\gamma^T\psi(x(t_0)), \;\; \lambda(T) = \left\{\frac{\partial K(x(T))}{\partial x(T)}\right\}^T, \;\; \psi(x(t_0)) = 0.$$

Задача 2.

Пусть A — оператор в l^2, действующий на вектор $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ следующим образом:

$$A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \to (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Найдите собственные числа оператора A и его спектр.

Решение.

Собственных чисел у оператора A нет. В самом деле, допустим, что λ — собственное число; тогда имеется ненулевой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ такой, что $Ax = \lambda x$. То есть

$$(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots).(1)$$

Отсюда $0 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2, x_2 = \lambda x_3, \ldots$. Если $\lambda \neq 0$, то это дает $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$, что противоречит условию $x \neq 0$. Остается рассмотреть случай $\lambda = 0$. В этом случае соотношение (1) сразу дает $x = 0$.

Спектром оператора A является замкнутый единичный круг

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$$

(в комплексной плоскости $\mathbb{C}$). Действительно, для любого $x \in l^2$ имеем $\|Ax\|_{l^2} = \|x\|_{l^2}$ (т.е. A — изометрия). Таким образом, норма оператора A равна 1. Следовательно спектр содержится в D (по теореме о спектральном радиусе). Остается показать, что всякое число $\lambda \in D$ является точкой спектра, т.е. таково, что $A - \lambda I$ необратим. Берем произвольное $\lambda \in D$. Пусть $y = (1,0,0,\ldots)$. Предположив, что $A - \lambda I$ обратим, получаем, что существует $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2$ такой, что

$$Ax - \lambda x = y.$$

То есть

$$-\lambda x_1 = 1, \quad x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad x_2 - \lambda x_3 = 0, \quad x_3 - \lambda x_4 = 0, \ldots.$$

Отсюда $\lambda \ne 0$ и

$$x_1 = \frac{-1}{\lambda}, \quad x_2 = \frac{-1}{\lambda^2}, \quad x_3 = \frac{-1}{\lambda^3}, \ldots.$$

Поскольку $|\lambda| \le 1$ получаем противоречие с условием $x \in l^2$.

Задача 3.

Дана функция на языке программирования Python:

```python
def recur(n):
    if n == 0:
        return 1
    if n == 1:
        return -3
    return -recur(n-1) + 6*recur(n-2)
```

Чему будет равен результат вызова recur(2018)? Диапазон определения целых чисел считать неограниченным (т.е., целые числа не переполняются), размер стека также считать неограниченным (т.е. максимальное число рекурсивных вызовов не ограничено).

Решение.

Функция recur представляет собой линейное однородное рекуррентное соотношение

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

с начальными условиями

$$a_0 = 1,\ a_1 = -3.$$

Общее решение рекуррентного соотношения будем искать в виде

$$\mathrm{a_n} = \mathrm{r^n}.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$r^2 + r - 6 = 0$$

корнями которого являются

$$r_1 = 2,\ r_2 = -3.$$

Таким образом, общее решение рекуррентного соотношения имеет вид

$$a_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n,$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные. Используя начальные условия, получаем,

$$c_1 = 0,\ c_2 = 1.$$

Отсюда

$$a_n = (-3)^n .$$

Ответ: результатом вызова recur(2018) будет являться число $(-3)^{2018}$.

Задача 4.

Есть 3 источника, генерирующих запросы к серверу. Сервер не имеет накопителя, где запросы могли бы ожидать начала обслуживания. Таким образом, запросы, поступающие в момент, когда сервер занят, теряются. Запросы от источника i поступают согласно пуассоновскому процессу с интенсивностью λ_i, их времена обслуживания распределены экспоненциально (показательно) с параметром μ_i. Предполагая, что все входные пуассоновские процессы и все времена обслуживания независимы между собой, ответить на следующие вопросы.

а) Как распределены длины интервалов времени между обслуживанием очередных запросов (интервалы простоев)? Каково математическое ожидание интервала простоя?

б) Известно, что в текущий момент сервер обслуживает запрос типа 1. Какова вероятность, что следующий запрос, который поступит на обслуживание, будет иметь тип 2 ?

в) Для установившегося режима найти долю времени, когда сервер занят.

Решение.

Одно из возможных решений опирается на несколько широко известных и легко выводимых фактов об экспоненциальных распределениях и пуассоновских процессах.

Факт 1. В пуассоновском процессе с интенсивностью λ интервалы между последовательными событиями образуют последовательность независимых случайных величин, каждая из которых распределена экспоненциально с параметром λ. Напомним, что плотность распределения такой случайной величины есть $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ и 0 при $x < 0$, а её среднее (математической ожидание) есть λ^{-1}.

Факт 2. Сумма нескольких независимых пуассоновских процессов представляет собой пуассоновский процесс, интенсивность которого есть сумма интенсивностей исходных процессов.

Факт 3. Экспоненциальное распределение обладает свойством "отсутствия памяти", одна из формулировок которого такова

$$P\left(\xi > T + t | \xi > T\right) = P\left(\xi > t\right), \qquad t, T > 0.$$

Факт 4. Если ξ_1 и ξ_2 — независимые экспоненциальные с.в. с параметрами α_1 и α_2, то с.в. $\min(\xi_1, \xi_2)$ распределена экспоненциально с параметром $\alpha_1 + \alpha_2$ и

$$P\left(\xi_1 = \min(\xi_1, \xi_2)\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Обозначим N_t^i, $t \in \mathbf{R}_+$, — количество запросов, генерируемых источником i на временном промежутке $[0, t]$. Тогда $N_t = N_t^1 + N_t^2 + N_t^3$ — количество запросов всех типов на промежутке $[0, t]$.

Суммарный входной процесс N_t есть пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ (Факт 2). Из взаимной независимости входных потоков и обслуживания и комбинации Факта 3 и Факта 1 заключаем, что интервал простоя распределен так же, как и интервал между последовательными событиями процесса N_t .

Ответы на п. а): экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, среднее интервала простоя равно $\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)^{-1}$

После момента завершения обслуживания текущего требования типа 1 в силу Факта 3 (отсутствие памяти) все интервалы, отсчитываемые от этого момента до появления новых запросов различных типов, можно считать экспоненциальными с теми же параметрами. В силу их взаимной независимости и Факта 4 имеем **ответ на п. б)**:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\lambda_3}$$

так как это число равно $P\left(\xi_2=\min\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)\right)$.

Систему можно представить как цепь Маркова с непрерывным временем, состояния которой есть $0,1,2,3$ (состояние 0 - сервер не занят, состояние i $(i>0)$ - сервер обслуживает требование типа i) , а (ненулевые) интенсивности переходов

$$q_{0j}=\lambda_j,\qquad q_{j0}=\mu_j,\qquad j=1,2,3.$$

Если обозначить $\pi=\left(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3\right)$ строку из стационарных вероятностей (что и соответствует *установившемуся режиму*), то искомая доля времени, когда сервер занят есть $1-\pi_0$. Для нахождения π используем обычную систему линейных уравнений $\pi Q=0$, где Q инфинитезимальная матрица (матрица интенсивностей), $Q=\left(q_{kj}\right)$ с диагональными элементами $q_{kk}=-\sum_{m\neq k}q_{km}$. Уравнения с индексами $1,2,3$ имеют особенно простую форму

$$\pi_j\mu_j=\pi_0\lambda_j,\qquad j=1,2,3.$$

Отсюда $\pi_j=\pi_0\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$. Значение π_0 найдем из условия нормировки $\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, которое приобретает вид

$$\pi_0\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)=1.$$

Ответ на п. в): доля времени в установившемся режиме, когда сервер занят, равна

$$\frac{\rho}{1+\rho},\qquad \rho=\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda_j}{\mu_j}.$$

Задача 5.

Определить значения переменных *a, b, c, d, n, k, m, p* после выполнения программы на языке программирования Си в UNIX–подобной операционной системе при условии, что файла *a.txt* не существует в текущей директории. Какие значения этих переменных будут при повторном запуске программы? Обосновать свое решение.

```
#include <stdio.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>

void main()
{
        int a, b, c, d, k, m, n, i, p;
        char buf[50];
        i = creat(“a.txt”, 302);
        k = write( i,”good\n”, 6);
        a = i;
```

```
        close( i );
        b = open(“a.txt”, 1);
        m = write( b, “hello\n”, 12);
        c = open(“a.txt”, 0);
        d = read( c, buf, 3);
        n = read( d, buf, 10);
        p = read( c, &buf[d+n], 6);
}
```

Решение.

а). После запуска программы ОС создаст процесс. При создании процесса автоматически откроются три файла с пользовательскими дескрипторами 0, 1 и 2, соответственно, файлы стандартного ввода, стандартного вывода и стандартного протокола. Поэтому при выполнении системного вызова (СВ) *creat()* будет создан в текущей директории файл *a.txt* с первым свободным пользовательским дескриптором 3, т.е. ***i=3***. Следует обратить внимание на права доступа к этому файлу - *302*, - они заданы в десятичной системе счисления. Удобнее их рассматривать в восьмеричной системе. При переходе к восьмеричной системе счисления получим $302_{10} = 456_8$, или в двоичной системе счисления 100 101 110. Таким образом, владелец файла может только читать информацию из этого файла. Но не надо забывать, что СВ *creat()* не только создает файл, но и, одновременно, открывает его на запись, поэтому следующая инструкция *write()* успешно выполнится и значение идентификатора *k* станет равным 6 (***k=6***), т.е. в файл запишется столько байтов, сколько указано в СВ *write().*

После выполнения СВ *close()* файл с пользовательским дескриптором 3 открепится от процесса. Далее, при выполнении СВ *open()* файл *a.txt* открывается для записи. Но так как права доступа не позволяют владельцу файла сделать это, СВ *open()* вернет -1, т.е. ***b=-1.*** Значение *m* также будет равно -1 (***m=-1***).

Следующей инструкцией *open()* открывается файл *a.txt* на чтение. Это можно сделать, т.к. права доступа позволяют. Поэтому СВ вернет номер первой свободной строки в таблице пользовательских дескрипторов файлов процесса, т.е. значение ***c=3***.

СВ *read()* вернет значение 3, (***d=3),*** т.к. в файле *a.txt* записано 6 байтов, а требуется считать 3 байта.

Следующий СВ *read()* также вернет значение 3, вследствие того, что указатель «чтения/записи» открытого файла *a.txt* будет указывать на 4 байт, а в файле записано всего 6 байтов, т.е. ***n=3.***

При следующем чтении из этого файла, получим код ответа 0, что означает «признак конца файла», т.е. ***p=0.***

Таким образом, получаем следующие результаты: ***i=3, k=6, b=-1, m=-1, d=3, c=3, n=3, p=0.***

б). При повторном запуске программы необходимо учитывать тот факт, что файл *a.txt* уже существует в текущей директории и содержит 6 байтов, но права доступа к нему (456_8) не позволяют его модифицировать владельцу. Таким образом, СВ *creat()* вернет -1, т.е. ***i=-1*** и, вследствие этого, значение идентификатора ***k***, возвращаемое СВ *write(),* тоже будет равным -1, т.е. ***k=-1***.

Остальные значения запрашиваемых идентификаторов не изменятся, т.к. операция записи в файл *a.txt* даст такой же результат (***b=-1, m=-1***), а операции чтения из файла – разрешены, - ***c=3, d=3, n=3, p=0***.

В итоге: ***i=-1, k=-1, b=-1, m=-1, d=3, c=3, n=3, p=0.***

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Предварительные критерии оценивания

Задание включает 5 задач. Оценивание работ участников олимпиады осуществляется по 100 балльной шкале. Распределение баллов по задачам:

Задача № 1 – 20 баллов;
Задача № 2 – 20 баллов;
Задача № 3 – 10 баллов;
Задача № 4 – 20 баллов;
Задача № 5 – 30 баллов.

Список рекомендуемой литературы по каждой программе

1. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Физматлит, 2005.

3. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Ленанд, 2015 (URSS).

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. — М.:Физматлит, 2006.

5. Бах Дж.М. Архитектура операционной системы UNIX.

6. Харви Дейтел, Пол Дейтел, Дэвид Р. Чофнес Операционные системы. Часть1. Основы и принципы. Третье издание. Пер. с англ. –М.: «Бином-Пресс», 2011.

7. Стивенс Р., Раго С. UNIX. Профессиональное программирование, 2-е издание. - СПб.: Символ-Плюс, 3-е издание, 2013.

8. Х.Майн, С.Осаки. Марковские процессы принятия решений. Наука, Москва, 1977.

9. Дынкин Е.Б, Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. Москва, Наука, 1975.

10. Вентцель Е.С. «Исследование операций. задачи, принципы, методология», М. Высшая школа, 2000.

11. А.Н.Ширяев. Вероятность 1,2. Москва, МЦНМО, 2004.

12. Каштанов В.А. Элементы теории случайных процессов. Москва, МИЭМ, 2010.

13. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М., Высшая школа, 1982.

14. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. — М: Профессия, 2003.

15. Афанасьев. В.Н. Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование. Учебное пособие МИЭМ. 2006.