Демонстрационный вариант задания Олимпиады НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2018 г.
по направлению «Прикладная математика и информатика»

Профиль: «Прикладная математика и информатика» **КОД - 020**

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, maximal sum is equal to 100 points.

ОБЩАЯ ЧАСТЬ / GENERAL SECTION

1. Докажите, что:

1. Prove that:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

2. Является ли граф G, заданный матрицей инцидентности,

2. Determine whether the graph with the following incidence matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) эйлеровым
(2) гамильтоновым?

.

(1) is an Eulerian graph
(2) is a Hamiltonian graph?

3. Случайная величина x распределена равномерно на $[0, A]$ $(A > 1)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины y

3. x is a random value uniformly distributed on $[0, A]$ $(A > 1)$. Find expected value and variance of the random value y

$$y = \min(x^2, x)$$

4. Дана матрица M вида

4. The matrix M admits the following form

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

где $1 > a > b > 0$.
Докажите, что $\operatorname{Tr}(M^n) > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

where $1 > a > b > 0$.
Prove, that $\operatorname{Tr}(M^n) > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

5. Докажите, что верно следующее неравенство

5. Prove that the following inequality holds

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\cos x} < \ln 2$$

6. Найти состоятельную точечную оценку $\hat{p}$ параметра p геометрического распределения. Является ли смещенной оценка $\frac{1}{\hat{p}}$ для параметраr $\frac{1}{p}$?

6. Find consistent point estimator $\hat{p}$ for the parameter p of the geometric distribution. Is $\frac{1}{\hat{p}}$ an unbiased estimate for the parameter $\frac{1}{p}$?

Демонстрационный вариант задания олимпиады НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2018 г.
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL SECTION

Среди следующих задач решите не менее четырех. В зачет пойдут четыре лучших решения.

7. Найдите наименьшее расстояние от точки $A(0,1)$ до параболы $y = x^2$.

8. В городе Х. в связи со строительством новой АТС жителям выдают новые телефонные номера. Эти номера представляют собой различные вектора длины n из конечного алфавита мощности A. Будем говорить, что два вектора "t"-похожи, если у них есть в точности одна общая подстрока длины t($t \geq 2$), а все остальные символы различны. Чему равна вероятность того, что для некоторого номера Z, выданного одному из пользователей, найдется m "t"-похожих , если номера получили M жителей?

9. Найдите все такие x, при которых выполняется

10. Случайный граф задан следующим образом: между любыми двумя из n вершин с вероятностью p проводится ребро. Обозначим множество вершин такого графа как V. Треугольником называется цикл длины 3 т.е. любая неупорядоченная тройка вершин v_i, v_j, v_k ($v_i \in V, v_j \in V, v_k \in V, i \neq j, j \neq k$), таких, что каждая из них соединена ребром с двумя другими. Чему равно математическое ожидание числа треугольников в случайном графе с n вершинами и вероятностью p?

11. Шесть возможно несимметричных монет подбрасываются 100 раз. Результаты испытаний заданы в таблице:

Solve at least four of the following problems. Up to four best solutions will be graded.

7. Find the shortest distance from the point $A(0,1)$ to the parabola $y = x^2$

8. Due to the construction of the dial central office in the city of X. the phone company assigns new phone numbers to the citizens. All phone numbers are distinct vectors of length n from the alphabet of the power A. Let us call any two vectors "t"–similar if they exactly one common substring of length $t(t \geq 2)$ and differ in all the other positions.Find the probability that for a certain phone number Z assigned to a user exactly m "t"-similar numbers were assigned if a total of M numbers were assigned

9.Find all values of x, for which the following equality holds

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2\cos^2(x) & \sin(2x) & \sin(2x) \\ \cos^2(x) & -\sin^2(x) & \sin^2(x) \end{vmatrix} = 1$$

10. A random graph with n vertices is defined in the following way: any pair of the vertices is connected with an edge with probability p. Let us designate a set of vertices with V. A triangle is a cycle of length 3 i.e.an unordered triple of vertices v_i, v_j, v_k ($v_i \in V, v_j \in V, v_k \in V, i \neq j, j \neq k$) such that any of the vertices in this triple is connected with the reminder two with an edge. Find the expected number of triangles in a random graph with n vertices if the probability of adjacency is p?

11. Six possibly biased coins are tossed 100 times. The results of the trial are given below

Число гербов \Number of heads	0	1	2	3	4	5	6
Частота\ Observed Number of Outcomes	2	10	16	42	18	9	3

Используя критерий χ^2 проверить гипотезу о распределении числа гербов по биномиальному закону с параметрами 6 и 0,5 при 5% уровне значимости. Таблица критических значений для критерия χ^2 и различного числа степеней свободы ν при заданном уровне значимости приведена ниже

Using χ^2 test with significance level 5% check the following hypothesis: the number of heads has binomial distribution with parameters 6 and 0,5. The table of the critical values for the χ^2 test , significance level 5% and different number of degrees of freedom ν is given below

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi^2_{0,05}$	3.841	5.991	7.815	9.488	11.070	12.592	14.067	15.507	16.919

12. С помощью суперпозиции из функции алгебры логики f можно получить константы 0 и 1. Доказать, что функция f образует полную систему.

12. Constants 0 and 1 can be obtained by superposition of the Boolean function f. Prove that f forms a functionally complete system

13. Доказать, что дополнение планарного графа на n вершинах непланарно при $n \geqslant 9$

13. Prove, that a complement graph of a planar graph with n vertices is a non planar graph for any $n \geqslant 9$

14. Сколько существует функций алгебры логики f от n переменных таких, что система $A = \{f, \overline{f}\}$ не является полной?

14. How many Boolean functions f of n variables exist, such that system $A = \{f, \overline{f}\}$ is not functionally complete?