Математика **10 класс**

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

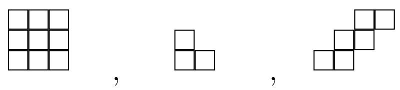
1. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

2. Фонари располагаются на плоскости, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leq a$ и $y \leq b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

3. Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

4. Прямоугольник 13×9 составлен из трёх типов фигурок:

Тип A Тип B Тип C



(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.

5. Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

6. На плоскости задан конечный набор равных кругов. Известно, что для любых 4 кругов есть прямая, пересекающая некоторые 3 из них. Докажите, что существует 12 прямых, таких что каждый круг пересекается хотя бы с одной из них.