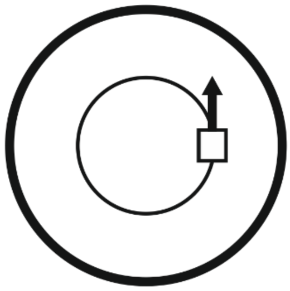
Время выполнения заданий — 240 минут.

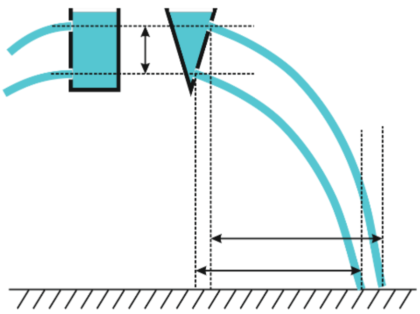
Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк. Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.



Задача 1 (20 баллов). Луноход двигается по поверхности Луны так, что школьник Вова, наблюдающий на ним с Земли, видит, что он движется по кругу с центром в середине диска Луны с постоянной скоростью. Радиус круга равен половине радиуса диска Луны. Вова фиксирует скорость лунохода, соответствующую его периоду обращения $T = 4$ ч. Найдите горизонтальное относительно поверхности Луны ускорение лунохода, которое он испытывает при таком движении. Возможно ли такое движение по поверхности Луны с периодом $T = 2$ч 15 мин., если коэффициент трения о поверхность Луны $\mu = 0.3$. Масса Луны $M_л = 7.5 \cdot 10^{22}$кг, её радиус 1750 км, гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$Н м^2/кг^2. Вращением Луны вокруг Земли и вращением обоих планет вокруг своей оси пренебречь.

Задача 2 (20 баллов). Крокодил Гена наряжал елку в Доме дружбы к Новому году. В елочной гирлянде было 30 лампочек четырех цветов, последовательно: синий, красный, желтый, зеленый, синий и так далее. Шапокляк пробралась в дом дружбы и вырезала из гирлянды две лампочки одного цвета, тем самым разрезав её на три части. Крокодил Гена нашел и соединил полученные отрезки гирлянды параллельно. Оказалось, что сопротивление всей гирлянды уменьшилось ровно в 15 раз. Найти сколько лампочек может быть в каждом из отрезков, на которые разделили гирлянду. Как изменится количество тепла, которое выделяется на каждой лампочке за 1 с в конечной гирлянде по сравнению с исходной? Сопротивлением проводов можно пренебречь, сопротивление всех лампочек одинаково.



Задача 3 (20 баллов). Преподаватель физики на уроке объяснял школьникам эффект давления в жидкости. Для этого он взял цилиндрическое ведро с водой и проделал в нем два отверстия: вблизи верхнего края и недалеко от дна ведра, расстояние между отверстиями составило 20 см. При этом горизонтальное расстояние, которое преодолевала верхняя струя воды от точки вылета оказалось меньше (24 см), чем для нижней (31 см). Любознательный мальчик Петя решил повторить опыт на перемене, однако в его распоряжении оказалось только конусообразное ведро с пожарного щита школы. Он проделал отверстия на том же вертикальном расстоянии и, подняв ведро на ту же высоту, сделал измерения горизонтальных расстояний, которые преодолевали верхняя (11 см) и нижняя (7 см) струи воды. Почему Петя не смог получить результатов, аналогичных полученным на уроке преподавателем? Найти скорости вылета струй воды из всех отверстий если пожарное ведро имело вид конуса с углом между осью симметрии и образующей равным 30 градусов.

Задача 4 (20 баллов). Шайба может без трения двигаться по гладкой поверхности, имеющей форму вогнутой окружности. Движение шайбы в обе стороны ограничено отвесными стенками, расположенными симметрично относительно нижней точки поверхности. Расстояние между стенками L мало по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Если шайба, находясь в нижней точке этой поверхности, имеет скорость v, то она будет совершать колебания с амплитудой горизонтального движения $L/(2\sqrt{3})$ и периодом T. Каков будет период движения шайбы, если её скорость в нижней точке поверхности увеличить вдвое? Предполагайте, что шайба упруго отражается от стенок.

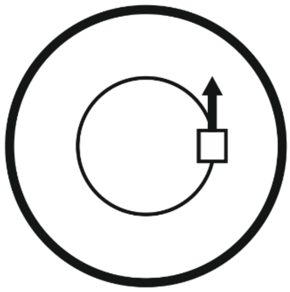
Задача 5 (20 баллов). Горячий чай наливают доверху в большую кружку. Чтобы он остыл до температуры, когда его можно будет пить, должно пройти 20 минут. Тот же чай можно налить в блюдце диаметром в два раза больше, чем кружка. Известно, что одну кружку чая можно разлить целиком в пять блюдец, а количество теплоты, отдаваемое в единицу времени с единицы поверхности чая прямо пропорционально разности температур чая и окружающей среды. Найти через какое время можно будет пить чай из блюдца, если исходная температура чая в кружке и в блюдце одинаковые. Считайте, что во всём объёме чая в каждый момент времени устанавливается одна и та же температура.

9 класс. Решения.

Предложение оценки: каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи; разбалловка приведена из расчёта 20 баллов на задачу.

Задача 1. Механика.

Условие (Ковалёва Маргарита Алексеевна). Луноход двигается по поверхности Луны так, что школьник Вова, наблюдающий на ним с Земли, видит, что он движется по кругу с центром в середине диска Луны с постоянной скоростью. Радиус круга равен половине радиуса диска Луны. Вова фиксирует скорость лунохода, соответствующую его периоду обращения $T = 4$ ч. Найдите горизонтальное относительно поверхности Луны ускорение лунохода, которое он испытывает при таком движении. Возможно ли такое движение по поверхности Луны с периодом $T = 2$ч 15 мин., если коэффициент трения о поверхность Луны $\mu = 0.3$. Масса Луны $M_л = 7.5 \cdot 10^{22}$кг, её радиус 1750 км, гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$Н м^2/кг^2. Вращением Луны вокруг Земли и вращением обоих планет вокруг своей оси пренебречь.



Решение: Луноход движется по круговой орбите радиуса $r = R/2$ со скоростью $v = \pi R/T$. Абсолютное значение ускорения лунохода равно

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{2\pi^2 R}{T^2}.$$

Это ускорение направлено под углом к поверхности Луны. Примем, что в центре Луны находится условный полюс, тогда луноход движется по линии постоянной широты, характеризующейся углом $\alpha = \pi/6$ между ней и полюсом. Касательная и нормальная компонента ускорения лунохода равны

$$a_\tau = a\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \quad a_n = a\sin\alpha = \frac{a}{2}$$

Для наблюдаемого Вовой периода $T = 4$ ч получаем тангенциальное ускорение $a_\tau = 0.14$ м/с^2. Отметим, что скорость лунохода $v = 380$ м/с $= 1380$ км/час, что является большим, но теоретически достижимым значением.

Теперь, на поверхности Луны ускорение свободного падения

$$g = \frac{GM_л}{R^2} = 1.63 \text{ м/с}^2.$$

Для движущегося лунохода сила реакции опоры равна

$$N = (g - a_n)m,$$

так что ограничение на тангенциальное ускорение определяется неравенством

$$F_{тр} < \mu N, \qquad a_\tau < \mu(g - a_n). \qquad (1)$$

Преобразовывая это неравенство, получаем ограничение на возможный период движения лунохода, наблюдаемую Вовой:

$$T > \frac{\pi\sqrt{R}}{\sqrt{g}}\sqrt{2\left(\frac{1}{\mu}\cos\alpha + \sin\alpha\right)} = 2 \text{ ч } 20 \text{ мин}.$$

Таким образом, луноход с угловой скоростью $u = 1.8 \cdot 10^{-6}$рад/с двигаться не может.

Разбалловка.

найдено полное ускорение, испытываемое луноходом	4 балла
найдено тенгенциальное ускорение	5 баллов
найдено ускорение свободного падения на Луне	3 балла
записано условие (1) на непроскальзывание	5 баллов
Найден ответ для минимально возможного периода, получен ответ	3 балла

Задача 2. Постоянный ток.

Условие (Ковалёва Маргарита Алексеевна). Крокодил Гена наряжал елку в Доме дружбы к Новому году. В елочной гирлянде было 30 лампочек четырех цветов, последовательно: синий, красный, желтый, зеленый, синий и так далее. Шапокляк пробралась в дом дружбы и вырезала из гирлянды две лампочки одного цвета, тем самым разрезав её на три части. Крокодил Гена нашел и соединил полученные отрезки гирлянды параллельно. Оказалось, что сопротивление всей гирлянды уменьшилось ровно в 15 раз. Найти сколько лампочек может быть в каждом из отрезков, на которые разделили гирлянду. Как изменится количество тепла, которое выделяется на каждой лампочке за 1 с в конечной гирлянде по сравнению с исходной? Сопротивлением проводов можно пренебречь, сопротивление всех лампочек одинаково.

Решение. Пусть сопротивление каждой лампочки гирлянды равно r. Тогда сопротивление всей исходной гирлянды равно $30r$. Пусть после того как гирлянду разрезали в ней осталось всего 28 лампочек в отрезках из x, y и $28 - x - y$ лампочек в каждом. Тогда сопротивление всей получившейся при параллельном соединении цепи можно найти из уравнения:

$$\frac{1}{xr} + \frac{1}{yr} + \frac{1}{(28 - x - y)r} = \frac{1}{2r} \qquad (1)$$

При решении необходимо помнить, что количество лампочек в каждом отрезке целое число, а одного цвета будут каждая четвертая лампочка в исходной гирлянде. Тогда один из отрезков, к примеру, x будет целым числом из набора: 3, 7, 11, 15, 19. Решая полученное уравнение на y легко увидеть, что целочисленные положительные решения будут только для $x = 3, x = 15$. Легко убедиться, что полученные отрезки гирлянды будут иметь длины 3, 10, 15 лампочек соответственно.

Для всей исходной гирлянды, как и для каждого из ее отрезков можно выписать закон Ома соответственно:

$$U = 30r\mathrm{I}_0$$

$$U = 3r\mathrm{I}_1$$

$$U = 10r\mathrm{I}_2$$

$$U = 15r\mathrm{I}_3$$

Отсюда находятся соотношения для токов в исходной гирлянде и в отрезках: $\mathrm{I}_1 = 10\mathrm{I}_0$, $\mathrm{I}_2 = 3\mathrm{I}_0$, $\mathrm{I}_3 = 2\mathrm{I}_0$.

Тогда, используя закон Джоуля-Ленца легко выписать следующие соотношения для тепла, выделяющегося на каждой лампочке в цепи из 30 лампочек, и в каждом из отрезков из 3 лампочек, 10 лампочек и 15 лампочек соответственно:

$$\mathrm{Q}_0 = \mathrm{I}_0{}^2\mathrm{rt}$$

$$\mathrm{Q}_1 = 100\mathrm{I}_0{}^2\mathrm{rt} = 100\mathrm{Q}_0$$

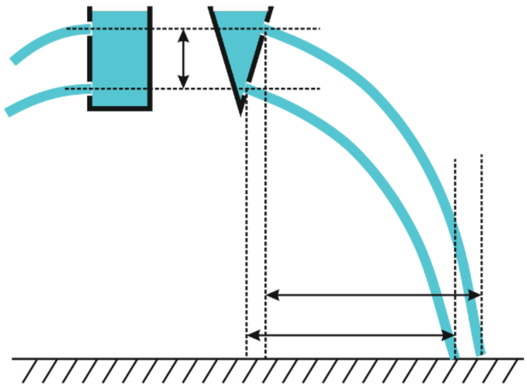
$$\mathrm{Q}_2 = 9\mathrm{I}_0{}^2\mathrm{rt} = 9\mathrm{Q}_0$$

$$\mathrm{Q}_3 = 4\mathrm{I}_0{}^2\mathrm{rt} = 4\mathrm{Q}_0$$

Разбалловка.

Нарисована электрическая схема	2 балла
Записано выражение для полного сопротивления (1)	4 балла
Определены ограничения на возможные количества лампочек в каждом отрезке	5 баллов
Найдены количества лампочек в отрезках	3 балла
найдено изменение количества тепла, выделяющегося в лампочках	6 баллов

Задача 3. Гидростатика



Условие (Ковалёва Маргарита Алексеевна). Преподаватель физики на уроке объяснял школьникам эффект давления в жидкости. Для этого он взял цилиндрическое ведро с водой и проделал в нем два отверстия: вблизи верхнего края и недалеко от дна ведра, расстояние между отверстиями составило 20 см. При этом горизонтальное расстояние, которое преодолевала верхняя струя воды от точки вылета оказалось меньше (24 см), чем для нижней (31 см). Любознательный мальчик Петя решил повторить опыт на перемене, однако в его распоряжении оказалось только конусообразное ведро с пожарного щита школы. Он проделал отверстия на том же вертикальном расстоянии и, подняв ведро на ту же высоту, сделал измерения горизонтальных расстояний, которые преодолевали верхняя (11 см) и нижняя (7 см) струи воды. Почему Петя не смог получить результатов, аналогичных полученным на уроке преподавателем? Найти скорости вылета струй воды из всех отверстий если пожарное ведро имело вид конуса с углом между осью симметрии и образующей равным 30 градусов.

Решение. Поскольку давление в ведре воды на разных высотах определяется только высотой столба воды над точкой, в которой определяется давление, то давление в обоих ведрах на одинаковой глубине будет одинаковым, вне зависимости от формы ведра. Тогда скорости вытекания воды из отверстий, проделанных на в ведрах на одной высоте будет одинаковой по модулю. Форма стенки ведра будет влиять только на нарпавление скорости, которое будет ортогонально касательной к стенке плоскости. В первом случае скорости движения воды из обоих отверстий будут горизонтальны, во втором – направлены под углом α=30˚ к горизонту. Тогда закон движения некоторого малого объема воды из отверстия в первом ведре будет такой:

$$\mathrm{OX}: x_1 = v_0 t_1,$$

$$\mathrm{OY}: h_1 = \frac{g{t_1}^2}{2}.$$

Для второго ведра закон движения будет соответственно следующим:

$$\mathrm{OX}: x_2 = v_0 \cos(\alpha) t_2,$$

$$\mathrm{OY}: h_1 = v_0 \sin(\alpha)\, t_2 + \frac{g{t_2}^2}{2}$$

Зная, далеко по горизонтали отлетает струя, можно выразить время пролета малого объема воды до приземления на столе от начальной скорости вылета:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0}, \qquad t_2 = \frac{x_2}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Подставив найденные выражения в уравнения движения по вертикальной оси и приравняв высоты, на которых находятся отверстия, получаем уравнения на скорости вылета воды:

$$\frac{g}{2}\frac{x_1^2}{v_0^2} = v_0 \sin(\alpha)\frac{x_2}{v_0\cos(\alpha)} + \frac{g}{2}\frac{x_2^2}{(v_0\cos(\alpha))^2}$$

Отсюда находим, что скорость вылета струи воды из отверстия на одинаковых высотах по модулю одинакова в обоих экспериментах и равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2\mathrm{tg}(\alpha)\, x_2}\left(x_1^2 - \frac{x_2^2}{\cos^2(\alpha)}\right)}$$

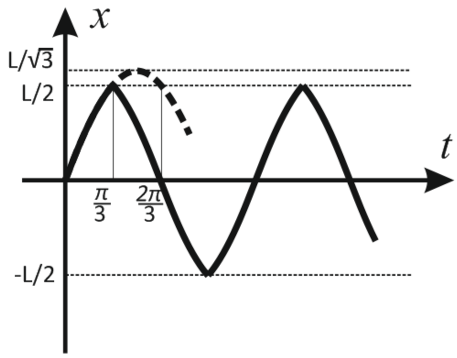
Разбалловка.

Понято, что скорость истечения воды в обоих экспериментах из соответствующих дырок одинаково	5 баллов
Записана траектория падения водяной струи	5 баллов
Выражена скорость истечения через величины горизонтальных смещений	7 баллов
Найдены численные значения скоростей истечения	3 балла

Задача 4. Колебания.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Шайба может без трения двигаться по гладкой поверхности, имеющей форму вогнутой окружности. Движение шайбы в обе стороны ограничено отвесными стенками, расположенными симметрично относительно нижней точки поверхности. Расстояние между стенками L мало по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Если шайба, находясь в нижней точке этой поверхности, имеет скорость v, то она будет совершать колебания с амплитудой горизонтального движения $L/(2\sqrt{3})$ и периодом T. Каков будет период движения шайбы, если её скорость в нижней точке поверхности увеличить вдвое? Предполагайте, что шайба упруго отражается от стенок.

Решение. Амплитуда колебаний скорости движения в направлении Ox равна $2v$. Этой амплитуде соответствовала бы амплитуда движения по координате равная $L/\sqrt{3}$, если бы его не ограничивали стенки ямы. При ударе о стенку ямы скорость движения по Ox меняется на противоположную. Какое получается в результате движение, легче всего разобраться графически. Из рисунка понятно, что из исходного периода



колебаний (без ограничения стенками ямы) исключается его $1/3$. Таким образом, период колебаний будет $2T/3$.

Разбалловка.

Понятно, что зависимость координаты от времени при колебаниях – синусоида	4
Понятно, что во втором случае шайба натыкается на стенку	5
Нарисован график зависимости от времени, на нём указаны моменты удара о стенки (или это сделано аналитически)	5
Вычислена часть периода, вырезаемая стенками	6

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Ковалёва Маргарита Алексеевна). Горячий чай наливают доверху в большую кружку. Чтобы он остыл до температуры, когда его можно будет пить, должно пройти 20 минут. Тот же чай можно налить в блюдце диаметром в два раза больше, чем кружка. Известно, что одну кружку чая можно разлить целиком в пять блюдец, а количество теплоты, отдаваемое в единицу времени с единицы поверхности чая прямо пропорционально разности температур чая и окружающей среды. Найти через какое время можно будет пить чай из блюдца, если исходная температура чая в кружке и в блюдце одинаковые.

Решение. Будем считать, что кружка и блюдца имеют цилиндрическую форму. Обозначим R, H и r, h радиус и глубину кружки и блюдца соответственно, тогда объемы будут выражаться так:

$$\mathrm{V_к} = \pi \mathrm{R}^2 \mathrm{H}$$

$$\mathrm{V_б} = \pi \mathrm{r}^2 \mathrm{h}$$

Зная, что $2R{=}r$, а $\mathrm{V_к} = 5\mathrm{V_б}$, мы получаем следующее соотношение величин: $\mathrm{H} = 20\mathrm{h}$.

Согласно условию задачи теплоотдача с поверхности чая происходит по закону:

$$\frac{\Delta \mathrm{Q}}{\Delta \mathrm{t}} = \mathrm{aS}(\mathrm{T} - \mathrm{T_c}), \qquad (1)$$

где S – площадь поверхности чая, T – температура чая, $\mathrm{T_c}$ – температура окружающей среды. Как мы знаем, при охлаждении чая на некоторую разность температур $\Delta\mathrm{T}$ количество выделяемой энергии будет определяться следующей закономерностью:

$$\Delta \mathrm{Q} = \mathrm{CM}\Delta \mathrm{T} \qquad (2)$$

Или, если описать изменение температуры со временем:

$$\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{aS}(\mathrm{T} - \mathrm{T_c})}{CM} = \frac{\mathrm{aS}(\mathrm{T} - \mathrm{T_c})}{C\rho V} \qquad (3)$$

Получаем, что скорость охлаждения будет определяться отношением S/V, то есть глубиной чашки или блюдца. Поскольку $\mathrm{H} = 20\mathrm{h}$, то и время охлаждения будет отличаться в 20 раз. Ответ: около 1 минуты.

Разбалловка.

Записано выражение для скорости отдачи тепла (1)	5 баллов
Записана связь между отданным теплом и изменением температуры (2)	5 баллов
Записано выражение для скорости изменения температуры (3)	5 баллов
Выражение (3) проанализировано и сделан вывод о соотношение скоростей охлаждения для чашки и блюдец	5 баллов