Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

9-1 От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

Решение. Двое выбирают одну из 6 дорог случайно, равновероятно и независимо, поэтому вероятность выборы заданной упорядоченной пары дорог равна 1/36. Возможные расстояние через час равны 0, 5км, $5\sqrt{3}$км и 10км соответственно для выбора одной дороги, двух соседних, двух, расходящихся под углом 120° и противоположных. Превышают 7 расстояния 10 и $5\sqrt{3}$ ($5\sqrt{3} > 5\sqrt{2.25} = 7.5 > 7$). Расстояние 10 получается в 6 случаях, расстояние $5\sqrt{3}$ — в 12 случаях. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{6+12}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на суть решения и ответ.	$+.$	18
Считается, что пути обязательно различны, в остальном решение верно.	$\pm$	16
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-2 Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что

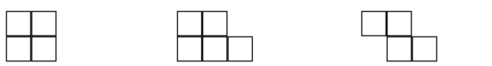
$$13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y=(2x-y)^2+(3x-z)^2+y \qquad (1)$$

Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число y не меньше 1. Если же $y=1$, то число $(2x-y)$ — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных x, y, z. Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например, $x=1, y=2, z=3$ или $x=1, y=1, z=3$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Несущественные неточности в рассуждении.	$+.$	19
Оценка без примера.	$\pm$	10
Только пример.	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-3 Имеется три типа фигурок. Тип A: квадраты 2×2. Тип B: прямоугольники 3×2, из которых вырезана одна угловая клетка. Тип C: прямоугольники 3×2, из которых вырезаны две противоположные угловые клетки:

Тип A Тип B Тип C



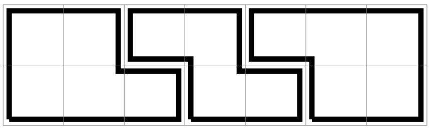
Из этих фигурок составлен прямоугольник 20×17. Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? Фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 20.

Решение. Раскрасим 17 рядов длины 20 в чёрный и белый цвет попеременно: первый ряд – чёрный, второй – белый и т.д.

Каждая фигурка типа A и каждая фигурка типа C будет всегда содержать поровну чёрных и белых клеток, а в каждой фигурке типа B количество чёрных и белых клеток должно отличается на 1. Поскольку чёрных клеток на 20 больше, чем белых, придётся взять не менее 20 фигурок типа B.

Этого количества хватит. Выкладываем прямоугольник 2×7 из двух фигурок типа B и одной фигурки типа C следующим образом:



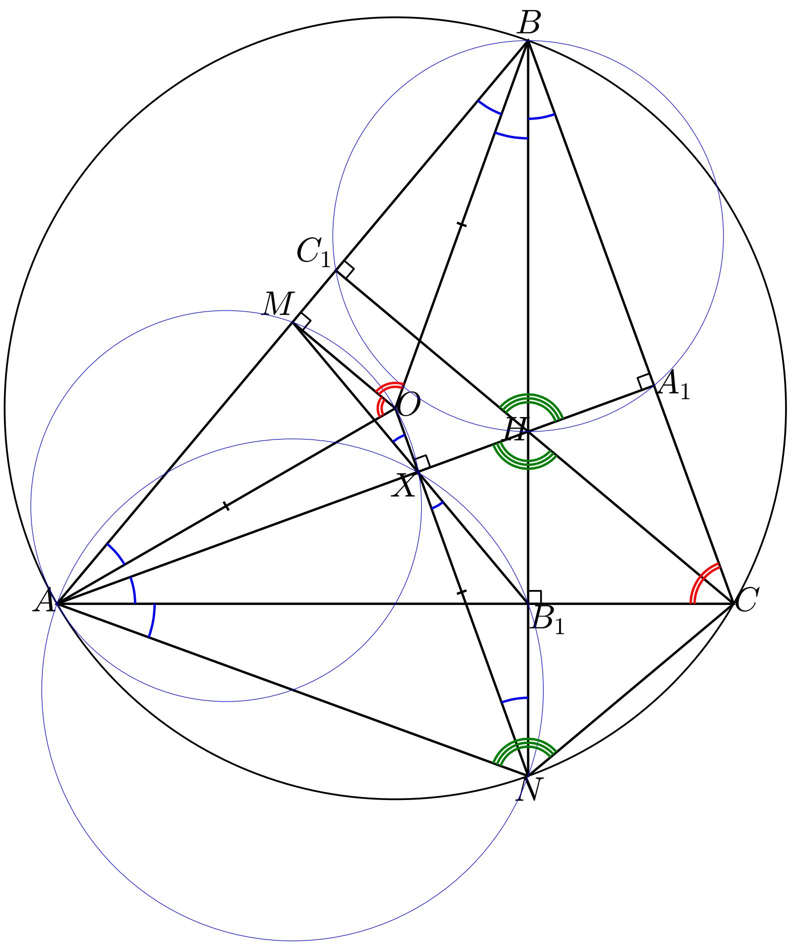
Затем составляем из таких прямоугольников полосу 20×7, на которую уйдёт 20 фигурок типа B, а оставшийся прямоугольник 10×20 составляем из квадратиков (фигур типа A).

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Доказана оценка для 20, но нет примера.	$\mp$	10
Доказана кратность ответа 4, невозможность $B=0$ и приведён пример.	$+/2$	8
Только пример.	$\mp$	7
Доказана кратность ответа 4 и невозможность $B=0$.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-4 Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку дано равенство углов $\angle OBN = \angle NBC$, имеет место один из двух случаев:

- они равны как ориентированные углы, то есть N и C по разные стороны от OB,
- они противоположны как ориентированные углы, то есть N и C по одну сторону от OB. Тогда O лежит на BC, откуда угол $\angle A$ прямой. В этом случае $A = B' = N$, и пересечение прямых AA', MB', ON тривиально. Далее этот случай мы рассматривать не будем.



Имеем $\angle CAA_1 = 90° - \angle C = \angle CBN = \angle NBO =: \alpha$. Поскольку O — центр окружности, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180° - 2\alpha$, откуда $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$, аналогично $\angle ONB = \alpha$ (равнобедренный треугольник $\triangle OBN$). Как легко убедиться, H и N симметричны относительно AC ($HN \perp AC$ и $\angle ANC = 180° - \angle B = \angle A_1HC_1 = \angle AHC$, так как BA_1HC_1 вписанный), так что $\angle CAN = \alpha$. Обозначим через X точку пересечения ON и AA_1. Докажем, что через неё проходит также и MB_1. Поскольку $\angle XAB_1 = \angle XNB_1$, четырёхугольник AXB_1N вписанный, а тогда $\angle AXN$ прямой и $\angle NXB_1 = \alpha$. Поскольку $\angle AMO = \angle AXO = 90°$, четырёхугольник $AMOX$ вписанный, а тогда $\angle MAO = \angle MXO = \alpha$. Это означает, что точки M, X, B_1 лежат на одной прямой.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
В доказательстве упущен нетривиальный существенный факт.	$\pm$	14
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-5 Чётное число $2N > 2$ называется подходящим, если оно делится на модуль разницы между наибольшим из своих чётных делителей, отличных от $2N$, и наибольшим из своих нечётных делителей. Сколько существует подходящих чётных чисел, не превосходящих 2018?

Ответ: 420.

Решение. Предположим, что число $2N$ подходящее. Пусть $2N = 2^k m$, где m нечётное. Если $k \geqslant 2$, то условие говорит, что $2^k m$ делится на $2^{k-1}m - m = m(2^{k-1} - 1)$, что возможно только при условии $k = 2$. Если $k = 1$ и $m = ps$, где p минимальный простой нечетный делитель m, то $2ps$ делится на $2s - ps = (2-p)s$, откуда имеем $p - 2 | p$, значит $p = 3$. Число N или имеет остаток 2 по модулю 4 или имеет остаток 3 по модулю 6. Тем самым число $2N$ является подходящим, если число N может иметь остаток 2, 3, 6, 9, 10 по модулю 12. Это значит, что в каждом ряду из 12 последовательных четных чисел ровно пять подходящих. Используя равенство $2018 = 2 \cdot (12 \cdot 84 + 1)$, получаем ответ $420 = 5 \cdot 84$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Доказана кратность только 2 или 4, полностью рассмотрен случай 4.	±	13
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

9-6 Из натурального числа n разрешается получить либо число $2n+1$, либо число $3n+2$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа от 1 до 2017, совместимые с числом 2018.

Ответ: 672, 1345.

Решение. Обозначив две указанные операции через D и T, то есть: $D\colon n \mapsto 2n+1$, $T\colon n \mapsto 3n+2$. Легко видеть, что операции перестановочны $D(T(n)) = T(D(n))$ и значет и многократно перестановочны $D^m(T^k(n)) = T^k(D^m(n))$. Докажем, что верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в виде следующей, ключевой в решении задачи, леммы:

Лемма. Если $D^m(b) = T^k(c)$, то найдётся такое d, что $b = T^k(d))$ и $c = D^m(d)$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что лемма очевидна для $m=1$. В самом деле, процедура T не меняет чётность числа, поэтому $c = 2d+1$. Это число d и нужно взять: $D(T^k(d)) = T^k(c) = D(b)$, откуда $b = T^k(d)$. Далее будем вести индукцию по m. Пусть $D^{m+1}(b) = T^k(c)$. Тогда снова $c = 2d+1$ и $D^m(b) = T^k(d)$. По предположению индукции найдётся такое число e, что $b = T^k(e))$ и $d = D^m(e)$. Тогда $D^{m+1}(e) = c$ и $b = T^k(e))$, что и требовалось. $\square$

Далее мы воспользуемся фактом, что операции D и T обратимы, то есть: если $D(a) = D(b)$, то $a = b$; если $T(a) = T(b)$, то $a = b$. Пусть число s совместимо с числом 2018. Тогда в силу указанных свойств операций (перестановочность и обратимость) можно считать, что одно и тоже число получается применением к s некоторого количество операций одного типа и применением к 2018 некоторого количества операций другого типа. Воспользуемся леммой. Поскольку 2018 можно получить только с помощью операции T, получаем: найдётся такое d, что $2018 = T^k(d)$ и $s = D^m(d)$. Но из первого равенства сразу вытекает, что $k = 1$ и $d = 672$. Но уже двукратное применение к числу 672 операции D выводит это число за границы отрезка [1; 2017]. Значит, $m = 1$ и $s = 1345$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Решение полностью верно, однако одно из чисел упущено.	$+.$	18
Получен общий вид совместимого с заданным.	$\pm$	12
Не рассмотрены случаи более двух операций.	$\mp$	3
Рассмотрено несколько частных случаев.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	