

Направление: "Математика"

Профили:

«Mathematics»

КОД - 010-011

«Математика и математическая физика»

Время выполнения задания — 240 минут

Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая из задач оценивается из 20 баллов; если сумма превышает 100, итог приравнивается к 100 баллам

Solutions must be written in English or in Russian. Each problem is worth 20 points; if the sum exceeds 100, then the resulting grade is set to be 100.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ / COMMON PART

1. Эллипс переходит в себя при повороте на угол, не кратный π . Докажите, что он окружность.

1. An ellipse is transformed into itself by rotation through an angle, which is not an integer multiple of π . Prove that it is a circle.

2. Многочлен $p(x)$ степени n делится без остатка на свою производную $p'(x)$. Опишите все такие многочлены.

2. A polynomial $p(x)$ of degree n is divisible by its derivative $p'(x)$. Describe all such polynomials.

3. Две положительные последовательности называются асимптотически эквивалентными, если предел их отношения равен 1. Даны две асимптотически эквивалентные положительные последовательности x_n и y_n , причем $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$. Докажите, что последовательности частичных сумм $\sum_{i=1}^n x_i$ и $\sum_{i=1}^n y_i$ асимптотически эквивалентны.

3. Two sequences of positive numbers are said to be asymptotic if the limit of their ratio is equal to 1. Given two asymptotic sequences of positive numbers x_n and y_n such that $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$, prove that sequences of partial sums $\sum_{i=1}^n x_i$ and $\sum_{i=1}^n y_i$ are asymptotic.

4. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел таких, которые нельзя представить в виде $n^2 + p$, где n — целое, а p — простое?

4. Is the set of natural numbers, which are not of the form $n^2 + p$, where n is integer and p is prime, infinite or finite?

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL PART

Выберите и выполните только один из блоков заданий специальной части в соответствии с выбранной вами программой магистерской подготовки.

According to the Master of Science program of your choice, please solve only one block from the following.

1. «Mathematics»

Solutions of the problems in this section should be written in English.

1. Do there exist two real 2×2 matrices X and Y such that $XY = -YX$ and $X^2 = Y^2 = -E$, where E is the identity matrix?

2. Let p , q , and r be non-constant non-vanishing entire holomorphic functions that satisfy the equation $p + q + r = 0$. Does there exist an entire function h such that p , q and r are constant multiples of h ?

2. «Математика и математическая физика»

Решения задач этого раздела следует записывать по-русски.

1. Тонкий однородный канат длины ℓ и массы m удерживается на горизонтальном столе перпендикулярно его краю. Коэффициент трения между канатом и поверхностью стола μ . Часть каната длины ℓ_1 свешивается со стола вертикально вниз. В некоторый момент канат отпускают и он начинает соскальзывать со стола без начальной скорости. Определите скорость каната v в момент, когда длина свешивающейся части достигнет значения $\ell_2 > \ell_1$. При каких значениях ℓ_1 возможно описанное выше движение? Ускорение свободного падения равно g .

2. Тонкое кольцо радиуса R расположено в вертикальной плоскости (однородное поле тяжести с ускорением свободного падения g параллельно плоскости кольца). В нижней точке кольца закреплен точечный заряд q . Второй точечный заряд q массы m может без трения перемещаться по кольцу, не покидая его в процессе движения. Составьте Лагранжиан этой системы, выпишите уравнения движения подвижного заряда и исследуйте точки равновесия (существование и устойчивость) в зависимости от параметров задачи.

