Профиль: «Экономика и управление образованием»

ОЛИМПИАДНОЕ ЗАДАНИЕ. РЕШЕНИЯ.

- Ниже приведены решения задач. Оценки в скобках показывают баллы за каждый этап решения. Некоторые задачи можно решать разными способами, в этом случае определялось достижение определенных логических этапов в решении. Как было указано в методических рекомендациях

- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Решите следующие задачи.

1. Задача_1. Четыре фирмы конкурируют по Курно (т.е. выбирая объемы производства) на рынке однородного товара в течение одного периода. Функция обратного спроса описывается как $P = 10 - Q$, где P – рыночная цена, $Q = q_1 + \ldots + q_4$ - совокупный выпуск, а $q_k \geq 0$ – выпуск фирмы $k = 1,\ldots,4$. Полные издержки фирм заданы следующим образом $C_1(q) = C_2(q) = 2q$, $C_3(q) = C_4(q) = 5q$. Прибыль фирмы k задана следующим образом $\Pi_k = P(Q)\, q_k - C_k(q_k)$. Найдите равновесные выпуски фирм. (16 баллов)

Решение.

Заметим, что (i) прибыль ни одной фирмы не может быть отрицательна в равновесии (т.к. фирма k всегда может выбрать $q_k = 0$ и получить нулевую прибыль) и (ii) выпуск любой фирмы не может быть отрицательным.

Если в равновесии все фирмы производят положительный выпуск, то равновесные значения q_k, $k = 1, 2, 3, 4$ являются решением системы условий оптимальности для каждой фирмы:

$d(\Pi_k)/d\, q_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$.

То есть должно выполняться:

$$\begin{cases} 10 - q_1 - Q - 2 = 0 \\ 10 - q_2 - Q - 2 = 0 \\ 10 - q_3 - Q - 5 = 0 \\ 10 - q_4 - Q - 5 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

(2 балла)

Суммируя все уравнения мы получаем следующее: $40 - 5Q - 14 = 0$. Значит, $Q = 26/5$. Подставляя это значение в систему (*) мы получаем, что

$$q_3 = q_4 = 10 - \frac{26}{5} - 5 = -\frac{1}{25}, q_1 = q_2 = 10 - \frac{26}{5} - 2 = \frac{14}{5}.$$ **(2 балла)**

Однако это противоречит тому, что фирмы производят положительный выпуск. Стало быть, часть фирм будет производить нулевой выпуск. **(2 балла)**

При этом заметим, что $q_3 = q_4 = 0$, $q_1 = q_2 = \frac{14}{5}$ не является равновесием, так как не выполняется условие оптимальности для фирмы 1 и 2. **(4 балла)**

Так фирмы 3 и 4 симметричны и менее эффективны, то можно предположить, что в равновесии только фирмы 1 и 2 производят положительный выпуск. (Или же можно формально рассмотреть случай, когда только фирма 3 производит нулевой выпуск и убедиться, что ее выпуск опять отрицателен).

Условие оптимальности на q_1, q_2 при условии, что $q_3 = q_4 = 0$ следующее: $\begin{cases} 10 - 2q_1 - q_2 - 2 = 0 \\ 10 - q_1 - 2q_2 - 2 = 0 \end{cases}$.

(2 балла)

Решение этой системы: $q_1 = q_2 = \frac{8}{3}$. При этом $Q = \frac{16}{3}, P = \frac{14}{3} < 5$, то есть фирмы 3 и 4 не имеют возможности получить положительную прибыль, производя положительный выпуск. **(4 балла)**

Ответ. Фирма 3 и фирма 4 не производят ничего, $q_3 = q_4 = 0$. Фирма 1 и фирма 2 производят 8/3 каждая.

2. Задача_2. Функция полезности потребителя задана как $U = \sqrt{x} + y$, где x и y – обьемы потребляемых товаров X и Y. Пусть $P_x > 0$ - цена товара X, а $P_y > 0$ - цена товара Y. Бюджет потребителя составляет $M > 0$ руб. Предположим, $P_x = 1$ руб. Найдите оптимальное потребление товаров X и Y для различных значений P_y и M, то есть $x(M, P_y)$ и $y(M, P_y)$. (16 баллов)

Решение.

Предположим, что при оптимальном выборе имеет место $x > 0$ и $y > 0$. Тогда из бюджетного ограничения имеем $y = (M - x) / P_y$. Подставляя это выражение в целевую функцию и дифференцируя её по x, получаем условие оптимальности: $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{P_y} = 0$. Решение: $x = P_y^2/4$. Таким образом, $y = \frac{M}{P_y} - \frac{P_y}{4}$. Заметим, что $y > 0$ при условии $M > \frac{P_y^2}{4}$. **(8 баллов)**

Если $M \le \frac{P_y^2}{4}$, то $y = 0$ (т.е. товар Y не потребляется), и $x = M$ (т.е. весь бюджет тратиться на товар X.) **(8 баллов)**

Ответ: $x = \frac{P_y^2}{4},\ y = \frac{M}{P_y} - \frac{P_y}{4}$, если $M > \frac{P_y^2}{4}$; $x = M,\ y = 0$, если $M \le \frac{P_y^2}{4}$.

3. Задача_3. Из 30 студентов 12 смогут сдать зачет с первого раза с вероятностью 0,6, 8 - с вероятностью 0,5 и 10 – с вероятностью 0,7. Случайно выбранный студент пошел на зачет и сдал его. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент? (16 баллов).

Решение

Имеем три группы, согласно вероятностям сдать зачет. Группа 1: 12 студентов, вероятность сдать P_1=0,6; группа 2: 8 студентов, вероятность сдать P_2=0,8; группа 3: 10 студентов, вероятность сдать P_3 = 0,7.

Вероятности того, что случайно выбранный студент из группы 1: P(студент из группы 1)=12/30; из группы 2: P(студент из группы 2)=8/30; из группы 3: P(студент из группы 3)=10/30. **(3 балла)**

Вероятность того, что случайно выбранный студент сдаст зачет:

P(сдал) =12/30*0,6 + 8/30*0,5 + 10/30*0,7 = 0,606.

(3 балла)

По формуле Байеса имеем следующее. Вероятность того, что студент сдавший зачет, принадлежит группе 1:

Р(студент из группы 1)*P_1/Р(сдал)=12/30*0,6/0,606=0,395.

Вероятность того, что студент сдавший зачет, принадлежит второй группе: Р(студент из группы 2)*P_2/Р(сдал)=8/30*0,5/0,606=0,22.

Вероятность того, что студент сдавший зачет, принадлежит третей группе:

Р(студент из группы 3)*P_3/Р(сдал)=10/30*0,7/0,606=0,385.

(8 балла)

0,395>0,385>0,22, значит наиболее вероятно студент сдавший экзамен из первой группы. **(2 балла)**

Ответ: К первой группе.

4. Задача_4. Из 200 задач первого раздела курса статистики, предложенных для решения, студенты решили 130, а из 300 задач второго раздела студенты решили 120. Можно ли при α = 0,01 утверждать, что первый раздел курса студенты усвоили лучше, чем второй? (16 баллов)

Решение

Пусть p_1 - процент абитуриентов, решающих задачи первого раздела, p_2 - процент абитуриентов, решающих задачи второго раздела. Введем нулевую гипотезу:

$H_0 : p_1 = p_2$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : p_1 > p_2$. Вычислим наблюдаемое значение критерия по формуле:

$U_{\text{набл}} = \dfrac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\left(1-\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$, где m_1=130, m_2=120, n_1=200, n_2=300.

Значит, $U_{\text{набл}} = 5{,}48$. **(6 баллов)**

Критическая точка $U_{\text{крит}}$ находится из условия $\Phi(U_{\text{крит}}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2*0{,}01}{2} = 0{,}49$.

Значит, $U_{\text{крит}} = 2{,}33$. **(6 баллов)**

Так как $U_{\text{набл}} = 5{,}48 > U_{\text{крит}} = 2{,}33$, нулевую гипотезу следует отвергнуть на данном уровне значимости, и можно считать, что первый раздел усвоен лучше. **(4 балла)**

Ответ: первый раздел усвоен лучше.

5. Задача_5. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено три варианта ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов X при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию, $M(X)$, $D(X)$. (16 баллов)

Решение

Вероятность дать правильный ответ на любой из вопросов равна 1/3. Вероятность того что будет дан не правильный ответ на любой из вопросов 2/3. Всего 4 вопроса. Пусть x – число правильных ответов.

x = 0, если на все четыре вопроса даны неверные ответы. Значит,

$P(x = 0)$ = 2/3*2/3*2/3*2/3=16/81.

$x = 1$, если на один вопрос дан правильный ответ, а на 3 остальных даны неправильные ответы. При этом правильный ответ может быть первым, вторым, третьим или четвертым. То есть, имеем 4 варианта и вероятность каждого равна 1/3*2/3*2/3*2/3. Значит,

P(x = 1) =4* 1/3*2/3*2/3*2/3=32/81.

$x = 2$, если на какие-то два вопроса даны правильные ответы, а на два остальных даны неправильные ответы. Есть 6 комбинаций двух правильных ответов из четырех. Вероятность каждой комбинации равна 1/3*1/3*2/3*2/3. Значит, P(x=1) =6* 1/3*1/3*2/3*2/3=24/81.

$x = 3$, если на три вопроса даны правильный ответ, а на один дан неправильный ответ. При этом неправильный ответ может быть первым, вторым, третьим или четвертым. То есть, имеем 4 варианта и вероятность каждого равна 1/3*1/3*1/3*2/3. Значит, P(x = 1) =4* 1/3*1/3*1/3*2/3=8/81.

$x = 4$, если на все вопросы даны правильные ответы. Значит, P(x=4)=1/3*1/3*1/3*1/3=1/81.

Таким образом, $X = \begin{cases} 0, p = \frac{16}{81} \\ 1, p = \frac{32}{81} \\ 2, p = \frac{24}{81} \\ 3, p = \frac{8}{81} \\ 4, p = \frac{1}{81} \end{cases}$.

(8 баллов)

Математическое ожидание X:

$M(X) = 0 * \frac{16}{81} + 1 * \frac{32}{81} + 2 * \frac{24}{81} + 3 * \frac{8}{81} + 4 * \frac{1}{81} = \frac{32+48+24}{81} = \frac{104}{81}$ =1,33. **(4 балла)**.

Дисперсия X:

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 =$$

$$=\left(0^2 * \frac{16}{81} + 1^2 * \frac{32}{81} + 2^2 * \frac{24}{81} + 3^2 * \frac{8}{81} + 4^2 * \frac{1}{81}\right) - \left(\frac{104}{81}\right)^2 =$$

$= \frac{32+96+72+16}{81} - \left(\frac{104}{81}\right)^2 = 2,67 - 1,78 = 0,89.$ **(4 балла)**.

Дайте развернутый ответ.

6. Вопрос_1. Предположим, что пять студентов работают над групповым проектом. Каждый из студентов индивидуально решает, сколько часов он потратить на эту работу. Качество проекта зависит от общего числа часов, затраченных всеми студентами. По результатам оценки проекта каждый студент получает одинаковую оценку, которая зависит от качества проекта. Издержки, связанные с каждым потраченным часом работы, так же как и ценность получения более высокой награды, одинаковы для каждого студента. Предположим, студенты определяют одновременно и независимо друг от друга.

А) Прокомментируйте следующее утверждение: «Качество проекта никогда не будет оптимальным с общественной точки зрения (то есть не будет максимизировать суммарную ценность оценок всех участников проекта)» . (10 баллов)
Б) Можно ли рассматривать групповой проект как общественное благо для данной группы студентов? Объясните свой ответ. (10 баллов)

Оценивание ответа.

Цель вопроса – выяснить знакомство участников олимпиады с понятием общественного блага, свойствами общественного блага, проблематикой финансирования общественного блага, в том виде как они изучаются в стандартном курсе Экономики Общественного Сектора. Нижеприведенный текст показывает общее возможное направление для аргументации.

А). Так как оценка зависит от общего количества затраченных часов, а издержки каждый студент несет независимо, то каждому отдельному участнику может оказаться выгоднее приложить усилий меньше, чем требуется для достижения оптимального с общественной точки зрения уровня. Данная проблема может быть обсуждена в терминах free-riding’a. Также это непосредственно относится к проблеме индивидуальной мотивации при финансировании общественного блага.

Можно формально показать, что при разумных условиях (полезность возрастает по оценке, оценка возрастает по общим затраченным часам, издержки возрастают по индивидуально затраченным часам) и существовании внутреннего решения задач максимизации общего блага и максимизации индивидуальной полезности, решение первой задачи предписывает затраты большего количества часов, чем решение второй задачи.

Но, строго говоря, могут быть особые ситуации, когда оба решения совпадают. Например, если предельные издержки для каждого студента крайне велики, а полезности от оценки малы, то и с точки зрения общественного благосостояния и с точки зрения индивидуальной рациональности студенты должны прикладывать нулевой уровень усилий.

Б) Студенты получают одну и ту же оценку за проект. Таким образом, более высокая оценка одного студента никак не ухудшает ситуацию для другого студента. То есть присутствует “несоперничество”.

Кроме того, каков бы ни был выбор студента, оценку он получит. То есть присутствует “неисключаемость” в отношении блага.

Таким образом, можно сказать, что признаки общественного блага присутствуют.

Этот вывод не зависит от того, что каждый студент имеет возможность самостоятельно, индивидуально и не зависимо от других участников, принимать решение о потраченных им часах работы. Данный аспект не отменяет характера общественного блага, и относится к проблеме добровольного финансирования общественных благ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

- Олимпиадное задание может включать задачи по микроэкономике (теория потребительского выбора, выбор в условиях неопределенности, теория фирмы, несовершенная конкуренция, теория игр), экономике общественного сектора (общественные блага, внешние эффекты, регулирование, провалы рынка), статистике и эконометрике (условная вероятность, функции распределение, построение доверительных интервалов).
- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Язык ответа не влияет на оценку.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться разрешено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.
- Список рекомендуемой литературы:

Вэриан Х.Р., Микроэкономика, промежуточный уровень. Современный подход. Москва, Пер. с англ., М: «Юнити», 1997 или любое более позднее издание.

Пиндайк Р.С., Рубинфельд Д.Л., Микроэкономика. Пер. с англ. 3-ого изд. М.:«Дело», 2000 или любое более позднее оригинальное издание

Бланшар О., Макроэкономика, Пер. с англ., М.:ИД ГУ-ВШЭ, 2010 или оригинальное издание.

Osborn M.J., An Introduction to Game Theory, Oxford University Press, 2009.

Магнус Я. Р., Катышев Т. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс М.: Дело, 2005, 2007 .

Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Издание 2-е. Том 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. М.: Юнити, 2001.

Экономика общественного сектора : учебник для академического бакалавриата / под ред. Л. И. Якобсона, М. Г. Колосницы- ной. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015.