



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РАБОТ

олимпиады для студентов и выпускников 2018 г
по направлению «МАТЕМАТИКА», профили «Mathematics» и
«Математика и математическая физика»

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

Задача 1. Эллипс переходит в себя при повороте на угол, не кратный π . Докажите, что он окружность.

Решение. Пусть отличный от окружности эллипс перешёл в себя при повороте. Поскольку у такого эллипса имеется ровно один большой диаметр¹, этот диаметр тоже перешёл в себя. Следовательно, перешла в себя и его середина. Тем самым, эта середина является центром поворота, а раз отрезок перешёл в себя при повороте вокруг середины, то угол поворота кратен π .

Критерии оценивания. Работы, в которых задача правильно решена в предположении, что центр поворота совпадает с центром эллипса, но само это предположение не доказано, оценивались не более, чем в 15 баллов. Работы, в которых было доказано, что центр поворота совпадает с центром эллипса, однако не было доказано, что эллипс не может перейти в себя при повороте на угол, не кратный π , оценивались максимум в 5 баллов.

Задача 2. Многочлен $p(x)$ степени n делится без остатка на свою производную $p'(x)$. Опишите все такие многочлены.

Решение. Решим задачу в предположении, что коэффициенты многочлена лежат в поле $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Поскольку p' делит p , каждый корень многочлена p' в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{K}$ является корнем и самого многочлена p . Таким образом, все корни многочлена p' являются кратными корнями многочлена p . Если $\text{char } \mathbb{K} = 0$, то кратность каждого корня многочлена p' ровно на единицу меньше, чем его кратность в p . Поэтому степень p' меньше степени p как минимум на количество различных корней многочлена p' . Следовательно, у p' ровно один корень. А значит, и у p ровно один корень на единицу большей кратности, т.е. $p(x) = a(x + b)^n$. Так как коэффициенты при x^n и x^{n-1} у многочлена p лежат в $\mathbb{K}$ и равны, соответственно, a и nab , числа a, b лежат в поле $\mathbb{K}$. Легко видеть, что и наоборот, каждый многочлен $p(x) = a(x + b)^n$, где $a, b \in \mathbb{K}$, делится на p' .

Критерии оценивания. Работы, в которых многочлен $p(x)$ верно найден в явном виде в предположении, что его коэффициенты лежат в поле характеристики нуль² или в конкретном числовом поле $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$, оценивались в 20 баллов. Работы, содержащие

¹Т.е. отрезок, соединяющий две максимально удалённые друг от друга точки эллипса.

²Жюри с удовольствием констатировало, что некоторые участники олимпиады показали, что над полем положительной характеристики у этой задачи бывают и другие решения. Правда дать исчерпывающее явное описание многочленов p в этом случае никому из участников и членов жюри, к сожалению, так и не удалось.

практически верное решение, в которых, однако, при вычислении явного вида многочлена была упущена одна из двух констант, от которых зависит ответ, оценивались максимум в 15 баллов. Работы, в которых правильно выписаны рекуррентные уравнения на коэффициенты многочлена p , однако решение этих уравнений в явном виде не получено, оценивались максимум в 5 баллов.

Задача 3. Две положительные последовательности называются асимптотически эквивалентными, если предел их отношения равен 1. Даны две асимптотически эквивалентные положительные последовательности x_n и y_n , причём $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$. Докажите,

что последовательности частичных сумм $\sum_{i=1}^n x_i$ и $\sum_{i=1}^n y_i$ асимптотически эквивалентны.

Решение. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n / x_n = 1$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|1 - y_n / x_n| < \varepsilon / 2$, т. е. $|x_n - y_n| < \varepsilon x_n / 2$, при всех $n > N$. Обозначим через S максимальную из двух конечных сумм $\sum_{i=1}^N x_i$, $\sum_{i=1}^N y_i$. Тогда при $m > N$ разность

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m y_i \right| \leq 2S + \sum_{i=N+1}^m |x_i - y_i| < 2S + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=N+1}^m x_i. \quad (1)$$

Поскольку ряд $\sum x_i$ расходится, существует такое $M \in \mathbb{N}$, что $\sum_{i=1}^m x_i > 4S / \varepsilon$ при всех $m > M$. Деля левую и правую части неравенства (1) на $\sum_{i=1}^m x_i$, получаем при всех $m > \max(M, N)$ требуемое неравенство

$$\left| 1 - \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{\sum_{i=1}^m x_i} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Критерии оценивания. Работы, в которых проводится логически грамотное рассуждение в стиле описанного выше, однако та или иная из ключевых оценок не объясняется или объясняется с вычислительными ошибками, оценивались максимум в 10 баллов. Работы, в которых были допущены грубые концептуальные ошибки в определениях и свойствах пределов оценивались в нуль баллов.

Задача 4. Конечно или бесконечно множество таких натуральных чисел, которые нельзя представить в виде $n^2 + p$, где n — целое, а p — простое?

Решение. Если два соседних нечётных числа $2k \pm 1$ оба не просты, то число k^2 удовлетворяет условию задачи, поскольку при $k^2 = n^2 + p$ число $p = (k+n)(k-n)$ просто лишь когда один из сомножителей равен ± 1 , а второй, автоматически равный $2k \pm 1$, прост. Если бы множество чётных чисел $2k$, оба соседа которых не просты, было ограничено сверху числом N , то как минимум каждое второе нечётное число, большее N , было бы простым, т. е. при $n \rightarrow +\infty$ нижний предел отношения $\pi(n)/n$, где $\pi(n)$ означает количество положительных простых чисел не превосходящих n , был бы не меньше $1/4$. Но известно, что $\pi(n)/n$ асимптотически эквивалентно $1/\ln n$ и стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому чисел, не представимых в виде $n^2 + p$, бесконечно много.

Критерии оценивания. За верное решение этой задачи в предположении, что $p > 0$, ставилось 20 баллов.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ ПРОФИЛЯ «Mathematics»

Problem M1. Does there exist two real 2×2 matrices X and Y such that $XY = -YX$ and $X^2 = Y^2 = -E$, where E is the identity matrix?

Solution. Let X, Y exist. Then a homomorphism of $\mathbb{R}$ -algebras $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, where $\mathbb{H}$ is the algebra of quaternions, $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ the algebra of real 2×2 matrices, is well defined by the assignment $\varphi(1) = E$, $\varphi(i) = X$, $\varphi(j) = Y$, $\varphi(k) = XY$. Since every nonzero quaternion is invertible, it is sent by φ to an invertible matrix. In particular, $\ker \varphi = 0$ and φ is not surjective. This is impossible, because the equality $\dim \mathbb{H} = \dim \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ forces every injective linear map between these spaces to be surjective.

Критерии оценивания. Работы, в которых не была доказана инъективность или несюръективность гомоморфизма $\mathbb{H} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ оценивались максимум в 15 баллов. Работы, в которых средствами линейной алгебры удалось грамотно установить какие-нибудь содержательные дополнительные свойства матриц X, Y (сосчитать след, определитель, собственные числа и т.п.), но больше никаких продвижений получено не было, оценивались максимум в 5 баллов.

Problem M2. Let p, q , and r be non-constant non-vanishing entire holomorphic functions that satisfy the equation $p + q + r = 0$. Does there exist an entire function h such that p, q and r are constant multiples of h ?

Solution. The function $f = p/q = -1 - r/q$ is entire holomorphic and does not take the values $0, -1$. Hence, it is a constant by the Picard theorem. Thus, p, q, r are non-zero constant multiples of each other.

Критерии оценивания. В решениях этой задачи не зафиксировано промежуточных достижений, и все работы оценивались либо в нуль, либо в 20 баллов.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ ПРОФИЛЯ «Математика и математическая физика»

Задача МФ1. Тонкий однородный канат длины ℓ и массы m удерживается на горизонтальном столе перпендикулярно его краю. Коэффициент трения между канатом и поверхностью стола μ . Часть каната длины ℓ_1 свешивается со стола вертикально вниз. В некоторый момент канат отпускают и он начинает соскальзывать со стола без начальной скорости. Определите скорость каната v в момент, когда длина свешивающейся части достигнет значения $\ell_2 > \ell_1$. При каких значениях ℓ_1 возможно описанное выше движение? Ускорение свободного падения равно g .

Решение. Канат однородный, обозначим через $\rho = m/\ell$ его линейную плотность. Тогда масса части длины ℓ_1 будет равна $m_1 = \ell_1 \rho$. Для возможности скольжения каната без начальной скорости необходимо, чтобы вес свисающей части превышал силу трения, действующую на часть $\ell - \ell_1$, находящуюся на поверхности стола: $\ell_1 \rho g > \mu(\ell - \ell_1) \rho g$. Это даёт условие на параметры задачи, при выполнении которого возможно скольжение каната без начальной скорости: $\ell_1 > \mu \ell / (1 + \mu)$. Для определения скорости каната в момент, когда длина свешивающейся части достигнет значения ℓ_2 , воспользуемся законом сохранения и изменения механической энергии: $E_2 - E_1 + U_2 - U_1 = A_{\text{тр}}$, где $A_{\text{тр}}$ есть работа силы трения, а изменения кинетической и потенциальной энергии каната равны, соответственно, $E_2 - E_1 = mv^2/2$, $U_2 - U_1 = -mg(\ell_2^2 - \ell_1^2)/2\ell$. Работа силы трения может быть вычислена как сумма двух слагаемых: постоянной силы трения, действующей на конец каната длины $(\ell - \ell_2)$, целиком оставшийся на столе, и

переменной силы, действующей на часть длины $(\ell_2 - \ell_1)$, которая перейдёт со стола в подвешенное положение:

$$A_{\text{тр}} = -\mu\rho g(\ell - \ell_2)(\ell_2 - \ell_1) - \mu\rho g \int_0^{\ell_2 - \ell_1} x dx = -\frac{\mu mg}{2\ell} (\ell_2 - \ell_1)(2\ell - \ell_2 - \ell_1).$$

Подставив все эти выражения в формулу закона сохранения и изменения энергии, получаем ответ:

$$v^2 = \frac{g}{\ell} (\ell_2 - \ell_1) \left((1 + \mu)(\ell_2 + \ell_1) - 2\mu\ell \right).$$

Критерии оценивания. Верно найденное условие на ℓ_1 оценивалось в 2 балла. Правильное вычисление работы силы трения — в 12 баллов. Правильное нахождение изменения потенциальной энергии — 4 балла. Правильная форма закона сохранения и изменения энергии — в 2 балла.

Задача МФ2. Тонкое кольцо радиуса R расположено в вертикальной плоскости (однородное поле тяжести с ускорением свободного падения g параллельным плоскости кольца). В нижней точке кольца закреплён точечный заряд q . Второй точечный заряд q массы m может без трения перемещаться по кольцу, не покидая его в процессе движения. Составьте Лагранжиан этой системы, выпишите уравнения движения подвижного заряда и исследуйте точки равновесия (существование и устойчивость) в зависимости от параметров задачи.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Выбирая в качестве обобщённой координаты угол ϕ между радиус-вектором подвижного заряда (начало отсчета в центре окружности) и вертикалью, получаем следующее выражение для Лагранжиана:

$$L = \frac{mR^2\phi'^2}{2} - U(\phi) = \frac{mR^2\phi'^2}{2} - \left(\frac{q^2}{2R \sin(\phi/2)} + 2mgR \sin^2(\phi/2) \right),$$

где $\phi' = d\phi/dt$ — производная координаты ϕ по времени, а $U(\phi)$ — потенциальная энергия электростатического и гравитационного взаимодействия. Уравнение Эйлера – Лагранжа (уравнение движения для ϕ) таково:

$$mR^2\phi'' = \cos(\phi/2) \left(\frac{q^2}{4R \sin^2(\phi/2)} - 2mgR \sin(\phi/2) \right).$$

Стационарные решения (точки равновесия) таковы:

а) Если $q^2 < 8mgR^2$, то есть две точки устойчивого равновесия, отвечающие 2 решениям уравнения в интервале $0 \leq \phi < 2\pi$:

$$\sin^3(\phi/2) = \frac{q^2}{8mgR^2}.$$

Эти точки расположены симметрично относительно вертикального диаметра кольца. Кроме того, имеется точка неустойчивого равновесия, отвечающая $\phi = \pi$. Устойчивость и неустойчивость определяются знаком второй производной потенциальной энергии $d^2U(\phi)/d\phi^2$ в соответствующих точках.

б) Если $q^2 \geq 8mgR^2$, то остаётся только одна точка равновесия $\phi = \pi$, которая становится точкой устойчивого равновесия.

Критерии оценивания. Верно выписан Лагранжиан — 7 баллов. Верно выписано уравнение Эйлера – Лагранжа 5 баллов. Верно найдены точки равновесия при двух режимах параметров задачи — 8 баллов.