Решения задач и критерии начисления баллов

Задача 1

Найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,dx$$

Решение

Вычислим интеграл, применяя интегрирование по частям:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,dx=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}(x)\,d\cos(x)=$$

$$=-\sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)\left(1-\sin^2(x)\right)\,dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

Выражая I_n, получаем рекуррентную формулу (формулу понижения):

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\qquad n\geq 2.$$

Вычислим I_0 и I_1:

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx=-\cos(x)\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

Получаем формулу:

$$I_{2n}=\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Применяя элементарное неравенство $e^x\geq 1+x$, верное для всех $x\in\mathbb{R}$, получаем оценку:

$$0\leq I_{2n}\leq\frac{\pi}{2}\exp\left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-2}-\cdots-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

Заметим, что гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ расходится к $+\infty$, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=0.$$

Мы доказали, что $I_{2n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Аналогично,

$$I_{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{2n-3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{3}\right) I_1 \le \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx = 0.$$

Допустимо также решение, где вместо построения оценок на I_n, получены формулы

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \qquad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

и корректно применена формула Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ при $n \to +\infty$.

Задача 2

Нормальным магическим квадратом порядка n называется такая квадратная матрица размера n на n, составленная из всех различных натуральных чисел от 1 до n^2, в которой суммы по каждому столбцу, каждой строке и двум главным диагоналям равны одному и тому же числу, называемому “магической константой”. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ –собственные числа матрицы M_n–нормального магического квадрата порядка n. Докажите, что для любого натурального $n \ge 3$ у любого магического квадрата порядка n есть собственное число λ_i такое, что выполняется $\sum\limits_{k\neq i} \lambda_k = 0$, и определите чему равно это число (для фиксированного n)?

Решение

Прежде всего найдем “магическую константу”. Обозначим ее S_n. Сумма всех элементов матрицы равна $\frac{n^2(n+1)^2}{2}$. Так как суммы по всем строкам и столбцам одинаковы, верно равенство

$$nS_n = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

откуда $S_n = \frac{n(n+1)^2}{2}$. Учитывая свойства матрицы и свойств следа

$$\mathrm{Tr}(M_n) = \sum_{k\neq i} \lambda_k + \lambda_i = S_n$$

откуда, с учетом условия $\sum\limits_{k\neq i} \lambda_k = 0$ следует

$$\lambda_i = S_n$$

т.е. если у нормального магического квадрата есть собственное число, удовлетворяющее требованию задачи , то оно обязательно равно “магической константе”. Осталось доказать, что “магическая константа” действительно всегда является собственным числом.Рассмотрим единичный вектор-столбец $[1,1,\ldots,1]^T$. В силу свойств магического квадрата

$$M_n\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=S_n\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

По определению собственного вектора и собственного числа вектор $[1,1,\ldots,1]^T$ называется (правым) собственным вектором, а S_n - собственным числом матрицы

Задача 3

“Задача о встрече”. 3 человека договорились о встрече с 12 до 13 часов. Каждый приходит из них приходит в случайный момент (в пределах оговоренного интервала времени) времени и ждет тех кто еще не пришел не более 30 минут. Какова вероятность, что все трое встретятся?

Решение

Пусть речь идет в общем случае о нескольких людях, обозначим это число n. Обозначим время прихода первого человека как X_1, второго как X_2,…, n-го как X_n и т.д. По условию задачи все величины независимы и равномерно распределены на отрезке единичной длины, например $[0,1]$. Пусть $X=\min\left(X_1,...,X_n\right)$ и $Y=\max\left(X_1,...,X_n\right)$, тогда задача сводится к нахождению вероятности:$P\left(Y-X<0,5\right)$. В силу независимости в совокупности случайных величин $X_1,...,X_n$ функция распределения равна:

$$F\left(x,y\right)=\begin{cases}P\left(X<x,Y<y\right)=y^n-\left(y-x\right)^n,x<y\\P\left(X<x,Y<y\right)=y^n,x>y\end{cases}.$$

Действительно, в случае $x<y$ получаем:

$$\begin{aligned}&P\left(X<x,Y<y\right)=P\left(\min\left(X_1,...,X_n\right)<x,\max\left(X_1,...,X_n\right)<y\right)=\\&=P\left(\left(X_1,...,X_n\in[0,y]\right)\setminus\left(X_1,...,X_n\in[x,y]\right)\right)=P\left(X_1,...,X_n\in[0,y]\right)-P\left(X_1,...,X_n\in[x,y]\right)=\\&=y^n-\left(y-x\right)^n\end{aligned}$$

А в случае $y<x$:

$$P\left(X<x,Y<y\right)=P\left(\min\left(X_1,...,X_n\right)<x,\max\left(X_1,...,X_n\right)<y\right)=P\left(X_1,...,X_n\in[0,y]\right)=y^n.$$

Функция плотности равна:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}n\left(n-1\right)\left(y-x\right)^{n-2},x<y\\0,x>y\end{cases}.$$

В итоге с помощью интегрирования по интересующей области на плоскости получаем:

$$\iint\limits_{\substack{y-x<0,5\\ x<y\\ 0<x<1}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\substack{y-x<0,5\\ y>x\\ 0<x<1}} n(n-1)(y-x)^{n-2}\,dxdy =$$
$$= n(n-1)\left(\int_{0<x<0,5} dx \int_x^{x+0,5} (y-x)^{n-2}\,dy + \int_{0,5<x<1} dx \int_x^1 (y-x)^{n-2}\,dy\right) =$$
$$= n(n-1)\left(\int_{0<x<0,5} \tfrac{(x+0,5-x)^{n-1}-(x-x)^{n-1}}{n-1}dx + \int_{0,5<x<1} \tfrac{(1-x)^{n-1}-(x-x)^{n-1}}{n-1}dx\right) =$$
$$= n\left(\int_{0<x<0,5} 0,5^{n-1}dx + \int_{0,5<x<1} (1-x)^{n-1}\,dx\right) = n\left(0,5^n - \tfrac{(1-x)^n}{n}\Big|_{0,5}^1\right) = n\left(0,5^n + \tfrac{0,5^n}{n}\right) = \tfrac{n+1}{2^n}$$

Таким образом, для случая трех человек ответ вероятность встречи будет равна 0,5.

Задача 4

Матрицей перестановки порядка n называется такая матрица размера n на n, составленная из 0 и 1, что сумма (в поле действительных чисел) элементов по каждому ее столбцу и каждой строке равна 1. Найдите вероятность того, что для выбранной наугад (т.е. случайно и равновероятно из всего множества матриц перестановки такого порядка) матрицы перестановки порядка 4 $P_i^{\{4\}}$ выполняется

$$\mathrm{Tr}(P_i^{\{4\}}) \geq |\det(P_i^{\{4\}})|$$

(все операции в поле действительных чисел)

Решение

Прежде всего, заметим, что любая матрица перестановки порядка n может рассматриваться как перестановка единичной матрицы того же порядка I_n. Следовательно $|\det(P_i^{\{n\}})| = 1$ (перестановка может изменять знак определителя, но не его модуль). Следовательно, необходимо найти количество матриц перестановки порядка n таких, что $\mathrm{Tr}(P_i^{\{n\}}) \geq 1$. Вновь рассматривая матрицу перестановки как результат перестановки единичной матрицы того же порядка, заметим, что след перестановочной матрицы может быть только натуральным числом или 0, причем след отличен от 0 в том и только том случае, если перестановка оставляет на месте хотя бы один столбец единичной матрицы. Таким образом вопрос о числе матриц, удовлетворяющих условию $\mathrm{Tr}(P_i^{\{n\}}) \geq 1$ сводится к решению **задачи о числе беспорядков** т.е. числе перестановок, которые не оставляют на месте ни одного элемента. Для рассматриваемого случая все такие перестановки можно выписать непосредственно (это не является ошибкой), но проще воспользоваться общей формулой которая может быть получена методом включения-исключения и сводится к утверждению о том, что число беспорядков равно субфакториалу и определяется соотношением

$$!n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

общее число перестановок (и следовательно различных матриц, включая единичную матрицу) равно $n!$, а искомая вероятность равна

$$p = 1 - \frac{!n}{n!} = 1 - \sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{5}{8}$$

Задача 5

Сколько существует попарно неизоморфных непланарных графов с 11 ребрами и 6 вершинами? Ответ: 4 графа

Решение

По теореме Понтрягина-Куратовского непланарный граф содержит подграф гомеоморфный графу K_5 или $K_{3,3}$. Решим задачу перебором.

Рассмотрим сначала случай, когда граф содержит подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$. Так как граф $K_{3,3}$ содержит 6 вершин и 9 ребер, то в данном случае допустимый граф получается добавлением двух ребер к графу $K_{3,3}$ (см. Рис. 1). При этом возможны два случая: оба ребра добавляются к одной доле графа $K_{3,3}$ или ребра добавляются к разным долям этого графа. Нетрудно показать, что полученные два графа не являются изоморфными (в первом случае в графе будет вершина степени 5, во втором случае все вершины имеют степень не большую 4). Кроме того, указанные графы не содержат подграф гомеоморфный K_5, так как содержат не более 4 вершин степени 4 или больше.

Рассмотри, теперь случай, когда граф содержит подграф гомеоморфный K_5. Так как граф K_5 содержит 5 вершин и 10 ребер, то допустимый граф можно получить следующими двумя способами (см. Рис. 1):

a. подразбиение ребра графа K_5 при помощи новой вершины;

b. добавление новой висячей вершины к графу K_5 и соединение ее с некоторой вершиной этого графа.

Указанные графы не являются изоморфными друг относительно друга и относительно тех графов, которые были получены при рассмотрении первого случая. Это нетрудно доказать, используя степени вершин графов в качестве инварианта. Если заданная пара графов является изоморфной друг другу, то число вершин заданной степени у указанных графов должно совпадать. В первом случае, граф содержит ровно одну вершину степени 2 и все остальные вершины имеют степень 4. Во втором случае, граф содержит одну вершину степени 1, одну вершину степени 5, и все остальные вершины имеют степень 4. Следовательно, графы не могут быть изоморфными.

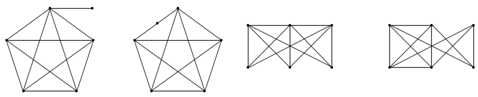

Рис. 1: Попарно неизоморфные графы в задаче 5.

Задача 6

Найдите производную $f^{(2018)}(0)$, где

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}.$$

<u>Решение:</u>

Разложить на простые дроби:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{x^2+1+(1-x)(1+x)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right).$$

Следовательно, при $|x| < 1$, $f(x)$ раскладывается в сходящийся степенной ряд

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} - x\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}\right).$$

Коэффициент в данном ряде при x^{2018} равен $(-1)^{2018} + (-1)^{1009} = 0$, следовательно, $f^{(2018)}(0) = 0$.

Задания специальной части

Задача 7

Сравните два числа: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{36}}, \qquad 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$.

Решение

Для решения задачи оценим суммы интегралами. Очевидно неравенство

$$\frac{1}{x^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha} \le \frac{1}{(x-1)^\alpha}, \qquad x \in [k, k+1],\ \alpha > 0.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $x \in [k, k+1]$, получаем:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{(x-1)^\alpha}.$$

Складывая полученные неравенства по k от m до n, получаем неравенство:

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \le \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \le \int_m^{n+1} \frac{dx}{(x-1)^\alpha}.$$

Таким образом,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{36}} = 1+\sum_{k=2}^{36}\frac{1}{k^{1/2}} \le 1+\int_2^{37}\frac{dx}{(x-1)^{1/2}} = 1+2(\sqrt{36}-\sqrt{1}) = 11,$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \sum_{k=1}^{27}\frac{1}{k^{1/3}} \ge \int_1^{28}\frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}(28^{2/3}-1) > \frac{3}{2}(9-1) = 12.$$

Следовательно,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{36}} < 12 < 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}.$$

Задача 8

$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ - вектор состоящий из n ($n \in \mathbb{N}$) независимых случайных величин, каждая из которых распределена равномерно на интервале $[0, A]$ ($A > 0$). $Y_{max}^{\{n\}} = \max\limits_k y_k$ -случайная величина, равная наибольшему из n элементов такого вектора. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y_{max}^{\{n\}}$

Решение

В силу определения функции распределения, функция распределения каждой из случайных величин y_i имеет вид

$$F_y(y) = p(y_i \le y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y}{A} & 0 \le y \le A \\ 1 & y > A \end{cases}$$

а функция распределения случайной величины $Y_{max}^{\{n\}}$ имеет вид

$$F_{Y_{\max}^{\{n\}}}(y) = p\left(Y_{\max}^{\{n\}} \le y\right) = p\left((y_1 \le y) \wedge (y_2 \le y) \ldots \wedge (y_n \le y)\right) = F_Y^n(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y^n}{A^n} & 0 \le y \le A \\ 1 & y > A \end{cases}$$

Функция плотности вероятности случайной величины $Y_{max}^{\{n\}}$ имеет вид

$$f_{Y_{\max}^{\{n\}}}(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = \begin{cases} n\frac{y^{n-1}}{A^n} & 0 \le y \le A \\ 0 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание случайной величины $Y_{max}^{\{n\}}$

$$\mathbf{E}\left(Y_{\max}^{\{n\}}\right) = \int\limits_0^A y\left(n\frac{y^{n-1}}{A^n}\right)dy = \frac{n}{n+1}A$$

. и квадрата этой величины

$$\mathbf{E}\left(\left(Y_{\max}^{\{n\}}\right)^2\right) = \int\limits_0^A y^2\left(n\frac{y^{n-1}}{A^n}\right)dy = \frac{n}{n+2}A^2.$$

. Теперь можем определить дисперсию случайной величины $Y_{max}^{\{n\}}$

$$\mathbf{Var}\left(\left(Y_{\max}^{\{n\}}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\left(Y_{\max}^{\{n\}}\right)^2\right) - \left(\mathbf{E}\left(Y_{\max}^{\{n\}}\right)\right)^2 = \frac{n}{n+2}A^2 - \left(\frac{n}{n+1}A\right)^2 = A^2\left(\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\right)$$

.

Задача 9

Граф G задан своей матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Является ли граф G гамильтоновым ?

b. Является ли дополнение графа G эйлеровым графом ?

Решение

Будем нумеровать вершины графа по номеру соотв. столбца (строки) матрицы смежности
a.) Согласно теореме Оре, если в графе с n–вершинами ($n \geq 3$) для любых двух различных несмежных вершин u и v выполняется $\deg u + \deg v \geq n$ (где $\deg u, \deg v$ – степени соответствующих вершин графа), то G — гамильтонов граф. Вершины графа имеют степени 4,5, и 6. Суммы степеней различных неинцидентных вершин равны 9,11 и 12. Тем самым требования теоремы Оре выполнены и, значит, граф G - гамильтонов
b.) Согласно теореме Эйлера о графе, граф - эйлеров (или, говоря иначе, содержит эйлеров цикл) тогда и только тогда когда этот граф связный и все его вершины имеют четную степень. Дополнение графа содержит две вершины степени 3 (это вершины с номерами 2 и 5), следовательно второе требование нарушено и дополнение графа не может быть эйлеровым графом

Задача 10

"Игра в лотерею". Производится игра в лотерею, в которой игрок каждый день может выиграть один из трех призов. Вероятность выигрыша каждого из призов – $p(3p < 1)$, она не меняется от начала игры до выигрыша соответствующего приза. Если игрок выиграл какой-либо из трех призов, он не может выиграть его вновь. Игра происходит до тех пор, пока не будут выиграны все призы. Найти математическое ожидание и дисперсию времени игры

Решение

Решение

Рассмотрим общий случай, когда производится в лотерею, в которой можно выиграть три приза с разными вероятностямиp_1, p_2 и p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 < 1)$. Обозначим $p_1 + p_2 + p_3 + q = 1$ и$\overline{p_i} = 1 - p_i$, $i = 1, 2, 3$. По условию игра заканчивается, когда будет выигран последний из трех призов, причем до этого момента должны быть выиграны все остальные призы. Обозначим события P_1 P_2, P_3 и Q соответственно как выигрыши первого, второго, третьего приза и отсутствие выигрыша на каком-либо шаге, $P_1 + P_2 + P_3 + Q = \Omega$.

Решение с помощью построения функции распределения вероятностей

Рассмотрим ситуацию, когда первый приз выигран, например, на шаге n. До этого момента времени необходимо, чтобы в игре были выиграны хотя бы один раз второй приз и хотя бы один раз третий приз и возможно, но не обязательно отсутствие выигрыша. Тогда удовлетворяющее задаче событие, заканчивающееся выигрышем первого приза, будет выражаться как:

$$\left\{(P_2 + P_3 + Q)^{n-1} \setminus \left[(P_2 + Q)^{n-1} + (P_3 + Q)^{n-1}\right]\right\} P_1 = \left\{(\Omega - P_1)^{n-1} \setminus \left[(P_2 + Q)^{n-1} + (P_3 + Q)^{n-1}\right]\right\} P_1$$

Последнее выражение означает, что из всех возможных событий $(\Omega - P_1)^{n-1}$, имевших место до момента времени n, вычитается событие $(P_2+Q)^{n-1}+(P_3+Q)^{n-1}$, когда до момента времени n не выиграны хотя бы по одному разу второй и третий призы. Вероятность этого события равна:

$$\begin{aligned}
&\left\{(P_2+P_3+Q)^{n-1} \setminus \left[(P_2+Q)^{n-1}+(P_3+Q)^{n-1}\right]\right\} P_1 = \\
&= \left\{P(P_2+P_3+Q)^{n-1} - \left[P(P_2+Q)^{n-1}+P(P_3+Q)^{n-1} - P\left((P_2+Q)^{n-1}(P_3+Q)^{n-1}\right)\right]\right\} P(P_1) = \\
&= \left\{P(P_2+P_3+Q)^{n-1} - \left[P(P_2+Q)^{n-1}+P(P_3+Q)^{n-1} - P(Q^{n-1})\right]\right\} P(P_1) = \\
&= \left\{(1-p_1)^{n-1} - \left[(p_2+q)^{n-1}+(p_3+q)^{n-1}-q^{n-1}\right]\right\} p_1
\end{aligned}$$

для случая, когда игра заканчивается выигрышем второго и третьего призов получаем выражения для вероятностей соответствующих событий:

$$\left\{(1-p_2)^{n-1} - \left[(p_1+q)^{n-1}+(p_3+q)^{n-1}-q^{n-1}\right]\right\} p_2,$$

$$\left\{(1-p_3)^{n-1} - \left[(p_1+q)^{n-1}+(p_2+q)^{n-1}-q^{n-1}\right]\right\} p_3.$$

Сложив три выражения получим распределение вероятностей искомого события – т.е. для каждого n вероятность, что за n шагов будут выиграны три приза:

$$\begin{aligned}
&(1-p_1)^{n-1}p_1+(1-p_2)^{n-1}p_2+(1-p_3)^{n-1}p_3- \\
&-(1-(p_1+p_2))^{n-1}(p_1+p_2)-(1-(p_2+p_3))^{n-1}(p_2+p_3)-(1-(p_1+p_3))^{n-1}(p_1+p_3)+ \\
&+(1-(p_1+p_2+p_3))^{n-1}(p_1+p_2+p_3)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили сумму выражений, каждое из которых представляет собой геометрическое распределение вероятностей, т.е. распределение вероятностей для числа неудач до первого успеха. Формулы математического ожидания и дисперсии (а также второго начального момента) для него хорошо известны. Если вероятность успеха равна p, то математическое ожидание равно $\frac{1}{p}$, дисперсия равна $\frac{q}{p^2}$, второй начальный момент $\frac{q}{p^2}+\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{2-p}{p^2}$.

Математическое ожидание (первый начальный момент) равен:

$$E(X)=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1+p_2}-\frac{1}{p_2+p_3}-\frac{1}{p_1+p_3}+\frac{1}{p_1+p_2+p_3}.$$

Второй начальный момент равен:

$$E\left(X^2\right)=\frac{2-p_1}{p_1^2}+\frac{2-p_2}{p_2^2}+\frac{2-p_3}{p_3^2}-\frac{2-(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2}-\frac{2-(p_2+p_3)}{(p_2+p_3)^2}-\frac{2-(p_1+p_3)}{(p_1+p_3)^2}+\frac{2-(p_1+p_2+p_3)}{(p_1+p_2+p_3)^2}.$$

Дисперсия равна:

$$\begin{aligned}
&D(X)=E(X^2)-E^2(X)= \\
&=\tfrac{2-p_1}{p_1^2}+\tfrac{2-p_2}{p_2^2}+\tfrac{2-p_3}{p_3^2}-\tfrac{2-(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2}-\tfrac{2-(p_2+p_3)}{(p_2+p_3)^2}-\tfrac{2-(p_1+p_3)}{(p_1+p_3)^2}+\tfrac{2-(p_1+p_2+p_3)}{(p_1+p_2+p_3)^2} \\
&-\left(\tfrac{1}{p_1}+\tfrac{1}{p_2}+\tfrac{1}{p_3}-\tfrac{1}{p_1+p_2}-\tfrac{1}{p_2+p_3}-\tfrac{1}{p_1+p_3}+\tfrac{1}{p_1+p_2+p_3}\right)^2
\end{aligned}$$

Если все вероятности равны, т.е. $p_1=p_2=p_3=p$ получаем:
$E(X)=\frac{3}{p}-\frac{3}{2p}+\frac{1}{3p}=\frac{11}{6}\frac{1}{p}$ и $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{p^2}\left(\frac{49}{36}-\frac{11}{6}p\right)$.

Решение с использованием формул условной и полной вероятности и свойств моментов.

Обозначим время игры $X = X_1 + X_2 + X_3$, где X_1 - время до выигрыша любого первого приза, X_2 - второго, X_3. Тогда, используя свойства моментов получаем:

$$E\left(X_1+X_2+X_3\right)=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+E\left(X_3\right),$$

$$\begin{array}{l} D\left(X_1+X_2+X_3\right)= \\ =D\left(X_1\right)+D\left(X_2\right)+D\left(X_3\right)+2COV\left(X_1,X_2\right)+2COV\left(X_2,X_3\right)+2COV\left(X_1,X_3\right) \end{array}.$$

С помощью формул полной вероятности и Байеса получаем следующую структуру событий для нахождения соответствующих вероятностей:

$$\left(X_1=m\right)=\left(Q^{m-1}P_1\right)+\left(Q^{m-1}P_2\right)+\left(Q^{m-1}P_3\right),$$

$$\left(X_2=n,X_1=m\right)=\left[\begin{array}{l} \left(Q^{n-1}P_1\left(P_1+Q\right)^{m-1}P_2\right)+\left(Q^{n-1}P_1\left(P_1+Q\right)^{m-1}P_3\right)+ \\ +\left(Q^{n-1}P_2\left(P_2+Q\right)^{m-1}P_1\right)+\left(Q^{n-1}P_2\left(P_2+Q\right)^{m-1}P_3\right)+ \\ +\left(Q^{n-1}P_3\left(P_3+Q_1\right)^{m-1}P_1\right)+\left(Q^{n-1}P_3\left(P_3+Q\right)^{m-1}P_2\right) \end{array}\right].$$

Соответствующие вероятности равны:

$$P\left(X_1=m\right)=q^{m-1}p_1+q^{m-1}p_2+q^{m-1}p_3=q^{m-1}\left(p_1+p_2+p_3\right)=\left(1-\left(p_1+p_2+p_3\right)\right)^{m-1}\left(p_1+p_2+p_3\right).$$

В случае равных вероятностей $P\left(X_1=m\right)=3p\left(1-3p\right)^{m-1}$.

Далее получаем:

$$\begin{array}{l} P\left(X_2=n|X_1=m\right)=\frac{P(X_2=n,X_1=m)}{P(X_1=m)}= \\ =\frac{\left[\begin{array}{l} q^{m-1}p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_2+q^{m-1}p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +q^{m-1}p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_1+q^{m-1}p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +q^{m-1}p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_1+q^{m-1}p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_2 \end{array}\right]}{q^{m-1}p_1+q^{m-1}p_2+q^{m-1}p_3}=\frac{\left[\begin{array}{l} p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_2+p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_1+p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_1+p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_2 \end{array}\right]}{p_1+p_2+p_3}= \\ =\frac{\left[(p_1p_2+p_1p_3)(p_1+q)^{n-1}+(p_1p_2+p_2p_3)(p_2+q)^{n-1}+(p_1p_3+p_2p_3)(p_3+q)^{n-1}\right]}{p_1+p_2+p_3}=P\left(X_2=n\right) \end{array}$$

Если все вероятности равны получаем:

$$P\left(X_2=n|X_1=m\right)=P\left(X_2=n\right)=2p\left(p+q\right)^{n-1}=2p\left(1-2p\right)^{n-1}.$$

Аналогично составляем функцию вероятности для X_3:

$$\begin{array}{l} P\left(X_3=k|X_1=m,X_2=n\right)=\frac{P(X_1=m,X_2=n,X_3=k)}{P(X_1=m,X_2=n)}= \\ =\frac{\left[\begin{array}{l} q^{m-1}p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_2\left(1-p_3\right)^{k-1}p_3+q^{m-1}p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_3\left(1-p_2\right)^{k-1}p_2+ \\ +q^{m-1}p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_1\left(1-p_3\right)^{k-1}p_3+q^{m-1}p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_3\left(1-p_1\right)^{k-1}p_1+ \\ +q^{m-1}p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_1\left(1-p_2\right)^{k-1}p_2+q^{m-1}p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_2\left(1-p_1\right)^{k-1}p_1 \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} q^{m-1}p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_2+q^{m-1}p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +q^{m-1}p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_1+q^{m-1}p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +q^{m-1}p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_1+q^{m-1}p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_2 \end{array}\right]}= \\ =\frac{p_1p_2p_3\left[\begin{array}{l} \left(p_1+q\right)^{n-1}\left(1-p_3\right)^{k-1}+\left(p_1+q\right)^{n-1}\left(1-p_2\right)^{k-1}+ \\ +\left(p_2+q\right)^{n-1}\left(1-p_3\right)^{k-1}+\left(p_2+q\right)^{n-1}\left(1-p_1\right)^{k-1}+ \\ +\left(p_3+q\right)^{n-1}\left(1-p_2\right)^{k-1}+\left(p_3+q\right)^{n-1}\left(1-p_1\right)^{k-1} \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_2+p_1\left(p_1+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_1+p_2\left(p_2+q\right)^{n-1}p_3+ \\ +p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_1+p_3\left(p_3+q\right)^{n-1}p_2 \end{array}\right]}=P\left(X_3=k|X_2=n\right) \end{array}$$

Если все вероятности равны получаем:

$$P\left(X_3 = k | X_2 = n\right) = P\left(X_3 = k\right) = p\left(1-p\right)^{k-1}.$$

Таким образом, в случае равных вероятностей имеют место следующие:

$$P\left(X_1 = m\right) = 3p\left(1-3p\right)^{m-1},$$

$$P\left(X_2 = n\right) = 2p\left(1-2p\right)^{n-1},$$

$$P\left(X_3 = k\right) = p\left(1-p\right)^{k-1},$$

$$COV\left(X_1, X_2\right) = COV\left(X_2, X_3\right) = COV\left(X_1, X_3\right) = 0$$

Исходя из последних формул видно, что для окончательного решения задачи нужно применить формулу для моментов геометрического распределения. Получаем:

$$E\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right) + E\left(X_3\right) = \frac{1}{3p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{p} = \frac{11}{6}\frac{1}{p},$$

$$D\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right) + D\left(X_3\right) = \frac{1-3p}{9p^2} + \frac{1-2p}{4p^2} + \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left(\frac{49}{36} - \frac{11}{6}p\right).$$

Задача 11

Сколько существует попарно неизоморфных графов с 8 вершинами и 25 ребрами? Ответ: 5 графов.

Решение

Заметим, что дополнения изоморфных графов являются изоморфными. Следовательно, число искомых графов совпадает с числом попарно неизоморфных графов с 8 вершинами и 3 ребрами. Далее, задача решается перебором. Перебор можно осуществить на основе распределения числа ребер по связанным компонентам графа (см. Рис. 2):

a. каждое ребро попадает в свою компоненту связности - 1 граф;

b. два ребра попадают в одну компоненту связности (образуют цепочку длины два) - 1 граф;

c. все графы попадают в одну компоненту связности (образуют цепочку длины три, или образуют цикл длины три, или образуют звезду) - 3 графа.

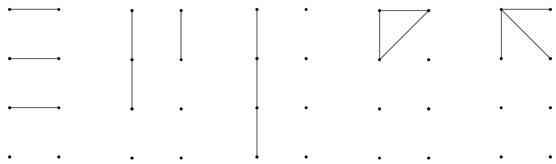

Рис. 2: Попарно неизоморфные графы в задаче 11.

Задача 12

a) Распределение признака X в генеральной совокупности объёма N задано как, $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$:

a_1	a_2	$\dots$	a_k
$\frac{N_1}{N}$	$\frac{N_2}{N}$	$\dots$	$\frac{N_k}{N}$

Обозначим $\bar{A}$ и $D(A)$ - генеральные среднее и дисперсию признака X:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i a_i}{N}, D(A) = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(a_i - \bar{A}\right)^2}{N}.$$

Из генеральной совокупности производится случайный бесповторный выбор n элементов: $X_1, X_2, \dots X_n$. Бесповторный выбор означает, что отобранные элементы в генеральную совокупность не возвращаются. Обозначим среднее арифметическое $\bar{X}$ признака X в случайной бесповторной выборке как:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Найти математическое ожидание $E\left(\bar{X}\right)$ и дисперсию $D\left(\bar{X}\right)$ среднего арифметического $\bar{X}$ признака X в случайной бесповторной выборке объема n из первоначальной двумерной генеральной совокупности объема N.

b) Пусть распределение признака X в генеральной совокупности объёма N задано как распределение Бернулли, $0 < N_1 < N$, p - генеральная доля значения a_1:

$a_1 = 1$	$a_2 = 0$
$p = \frac{N_1}{N}$	$q = 1 - p = \frac{N - N_1}{N}$

Аналогично пункту a) из генеральной совокупности производится случайный бесповторный выбор n элементов: $X_1, X_2, \dots X_n$. Обозначим среднее арифметическое $\bar{X} = \hat{p}_n$ (выборочную долю значения a_1) признака X в случайной бесповторной выборке как:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \hat{p}_n.$$

Найти математическое ожидание $E(\hat{p}_n)$ и дисперсию $D(\hat{p}_n)$ выборочной доли $\hat{p}_n$ значения a_1 признака X в случайной бесповторной выборке объема n из первоначальной двумерной генеральной совокупности объема N.

c) Пусть распределение двумерного признака (X,Y) в генеральной совокупности объёма N задано как, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}N_{ij}=N$:

X/Y	b_1	b_2	$\dots$	b_s
a_1	$\frac{N_{11}}{N}$	$\frac{N_{12}}{N}$	$\dots$	$\frac{N_{1s}}{N}$
a_2	$\frac{N_{21}}{N}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_k	$\frac{N_{k1}}{N}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{N_{ks}}{N}$

Обозначим $\bar{A}$, $\overline{B}$ и $D(A)$, $D(B)$ генеральные средние и дисперсии признаков X и Y:

$$\bar{A}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}N_{ij}a_i}{N},D(A)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}N_{ij}\left(a_i-\bar{A}\right)^2}{N}.$$

$$\overline{B}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}N_{ij}b_j}{N},D(B)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}N_{ij}\left(b_i-\overline{B}\right)^2}{N}.$$

Обозначим $COV(A,B)$ - генеральную ковариацию двумерного признака (X,Y):

$$COV(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}N_{ij}\left(a_i-\overline{A}\right)\left(b_j-\overline{B}\right)}{N}.$$

Из двумерной генеральной совокупности производится случайный бесповторный выбор n элементов: (X_1,Y_1),(X_2,Y_2),$\dots(X_n,Y_n)$. Как и раньше обозначим средние арифметические $\bar{X}$ и $\overline{Y}$ признаков X и Y в случайной бесповторной выборке как:

$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ ***и*** $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$.

Найти ковариацию выборочных средних $COV\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$ признака (X,Y) в случайной бесповторной выборке объема n из первоначальной двумерной генеральной совокупности объема N.

Решение.

В случае бесповторной выборки распределение всех X_1,X_2,$\dots X_n$ будет точно такое же, как в представленной выше таблице. Действительно, согласно правилу произведения и определения бесповторной выборки распределение любого элемента из первоначальной генеральной совокупности при k-ом шаге будет равно $\frac{(N-1)\dots(N-(k-1))}{N(N-1)\dots(N-(k-1))}=\frac{1}{N}$. Если сложить частоты повторяющихся элементов, то будет получена таблица, представленная выше. Аналогично можно показать, что совместное распределение X_i и X_j будет таким же, как совместное распределение X_1 и X_2. Таким образом:

$$E\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{n}E\left(X_1+...+X_n\right)=E\left(X_1\right)=\bar{A},$$

$$D\left(\bar{X}\right)=COV\left(\bar{X},\bar{X}\right)=COV\left(\frac{X_1+...+X_n}{n},\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}COV\left(X_i,X_i\right)+\sum_{i\neq j}^{n}COV\left(X_i,X_j\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(nD\left(X_i\right)+n\left(n-1\right)COV\left(X_1,X_2\right)\right)=\frac{D(A)+(n-1)COV(X_1,X_2)}{n}$$

Если положить $n = N$, то $D\left(\bar{X}\right) = 0$ в силу того, что в этом случае $\bar{X} = const$. Поэтому:

$$COV\left(X_1, X_2\right) = -\frac{D\left(A\right)}{N-1}.$$

Это означает, что:

$$D\left(\bar{X}\right) = \tfrac{D(A)+(n-1)COV(X_1,X_2)}{n} = \tfrac{D(A)-(n-1)\frac{D(A)}{N-1}}{n} = \tfrac{D(A)}{n}\tfrac{N-n}{N-1}\ .$$

Для генеральной и выборочной долей значений a_1 признака X получаем следующие выражения: $p = \bar{A}$ и $\hat{p}_n = \bar{X}$. Учитывая, что генеральная дисперсия равна $D\left(A\right) = p - p^2 = p\left(1-p\right) = pq$, исходя из полученных ранее выражений получаем:

$$E\left(\hat{p}_n\right) = p,$$

$$D\left(\hat{p}_n\right) = \tfrac{pq}{n}\tfrac{N-n}{N-1}\ .$$

Для вычисления ковариации $COV\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ проделаем следующую последовательность действий с помощью уже полученных выше результатов:

$$\begin{array}{l} COV\left(\bar{X},\bar{Y}\right) = \frac{D\left(\bar{X}+\bar{Y}\right)-D\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)}{4} = \frac{D\left(\overline{X+Y}\right)-D\left(\overline{X-Y}\right)}{4} = \\ = \frac{\frac{D(A+B)}{n}\frac{N-n}{N-1}-\frac{D(A-B)}{n}\frac{N-n}{N-1}}{4} = \frac{COV(A,B)}{n}\frac{N-n}{N-1} \end{array}.$$

Задача 13

Пусть функция алгебры логики f от трех переменных задана столбцом своих значений: $f(x_1,\, x_2,\, x_3) = (0111\ 1110)$. Найти сложность $L(f)$ реализации функции f при помощи схем из функциональных элементов в базисе $B = \{x \vee y,\, x \cdot y,\, \overline{x}\}$.

Решение.

Для доказательства верхней оценки достаточно предъявить формулу (схему), реализующую функцию f и имеющую сложность, равную 6-ти. Указанную формулу легко построить на основе совершенной конъюнктивной формы указанной функции и пользуясь правилом Де Моргана:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}.$$

При решении могут быть использованы различные другие методы синтеза, но они дают более слабую верхнюю оценку сложности. Схему сложности 7 можно построить при помощи разложения указанной функции по переменной:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2 \cdot x_3} \vee \overline{x}_1 \cdot (x_2 \vee x_3).$$

Схема сложности восемь получается на основе тупиковой дизъюнктивной нормальной формы указанной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_2 \cdot x_3.$$

Для доказательства нижней оценки требуется доказать, что любая оптимальная по сложности схема, реализующая указанную функцию, обладает определенными структурными ограничениями. Пусть Σ схема из функциональных элементов, которая реализует функцию f. Покажем, что в графе схемы Σ для вершины, соответствующей входной переменной $x_i, i = 1, 2, 3$, выполняется одно из следующих двух условий: либо полу-степень исхода указанной вершины больше или равна 2-ум, либо существует вершина, соответствующая функциональному элементу отрицания, которая имеет полу-степень исхода большую или равную 2-ум и которая соединяется с входной вершиной только при помощи функциональных элементов отрицания, полу-степень исхода которых равна 1 (другими словами, от вершины, соответствующей входной переменной идет цепочка из функциональных элементов отрицания, которая заканчивается некоторым элементом отрицания, выход которого ветвится).

Зафиксируем некоторую переменную (например, x_1) и предположим, что ни одно из указанных выше свойств не выполняется. Тогда от вершины, соответствующей переменной x_1, идет цепочка из элементов отрицания, которая заканчивается некоторым двухвходовым функциональным элементом. Пусть, например, этот элемент - дизъюнкция. Согласно структуре схемы, на один из входов указанного функционального элемента подается переменная x_1 или её отрицания, а на второй вход подаётся значение некоторой функции $g = g(x_2, x_3)$, которая может зависеть только от переменных x_2 и x_3. Заметим, что на нулевом и единичном наборе функция g не может принимать значение, равное 1. В этом случае, на выходе рассматриваемого функционального элемента всегда будет единица, независимо от значения переменной x_1, что противоречит существенности функции f от переменной x_1 на указанных наборах. Таким образом, функция g на указанных наборах должна принимать значения, равные 0. Следовательно, в обоих случаях на выходе функционального элемента дизъюнкции будет сформировано значение совпадающие со значением, которое приходит на вход, связанный с переменной x_1. Таким образом, значения функции на паре наборов $(0, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$, а также на паре наборов $(1, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$. Но это противоречит исходному заданию функции f. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение было неверным. Случай, когда двухвходовым элементом является конъюнкция рассматривается аналогично.

В силу симметрии функции f по всем своим переменным, описанное выше свойство выполнено для всех переменных функции f. Из указанного свойства следует, что в графе схемы есть как минимум 6 ребер, которые лежат на различных путях от входов к выходу схемы. Для соединения всех указанных ребер с выходом схемы требуется как минимум 5 двухвходовых функциональных элементов. В силу того, что функция f не является монотонной и не является антимонотонной и двухвходовоые функциональные элементы базиса реализуют только монотонные функции, то в схеме должен присутствовать хотя бы один элемент отрицания. Следовательно, схема не может содержать меньше 6-ти функциональных элементов.

Задача 14

В наличии имеется набор N производственных деталей, из них доля θ ($0 \le \theta \le 1$) относится к браку. Для приближенного определения $\hat{\theta}$ этой доли производится случайная выборка n деталей из первоначальной совокупности объема N без возвращения. Случайная выборка без возвращения означает, что случайно отобранные элементы обратно в набор не возвращаются. По результатам выборки n деталей оказалось, что число бракованных деталей составляет a штук. Найдите Методом Максимального Правдоподобия оценку $\hat{\theta}$ доли бракованных деталей в первоначальной выборке объёма N .

Решение.

По условию число бракованных деталей во всей совокупности обозначено как b . Обозначим случайные значения в выборке объема n как $X_1, X_2, \dots X_n$. Функция вероятности для первого наблюдения X_1 и его выборочного значения $x_1 = \{0,1\}$ равна:

$$p(x_1 \mid b) = b^{x_1} (N-b)^{1-x_1} \big/ N \,, \ x_1 = \{0,1\}$$

Для следующих значений функция вероятности равна $x_k = \{0,1\}$:

$$\begin{aligned} p(x_k \mid b, x_1, \dots, x_{k-1}) &= \left(b - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)^{x_k} \left(N - (k-1) - \left(b - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)\right)^{1-x_k} \Big/ (N-k+1) = \\ &= \left(b - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)^{x_k} \left(N - b - \left(\sum_{i=1}^{k-1} (1-x_i)\right)\right)^{1-x_k} \Big/ (N-k+1) \end{aligned} .$$

Итоговая функция вероятности равна:

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \mid b) &= p(x_1 \mid b) \prod_{k=2}^{n} p(x_k \mid b, x_1, \dots, x_{k-1}) = \\ &= \left[b^{x_1} (N-b)^{1-x_1} \big/ N\right] \left[\prod_{k=2}^{n} \left(b - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)^{x_k} \left(N - b - \left(\sum_{i=1}^{k-1} (1-x_i)\right)\right)^{1-x_k} \Big/ (N-k+1)\right] \end{aligned} .$$

Выполняя преобразования получим:

$$p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_k \mid b) = \binom{b}{a}\binom{N-b}{n-a} \Big/ \binom{N}{n}\binom{n}{a}, \text{ где } a = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ - число бракованных деталей.}$$

Если опустить множители, то получим:

$$p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \mid b) \sim b!(N-b)! \Big/ (b-a)!(N-b-n+a)! .$$

Для нахождения максимума, как и в схеме Бернулли, нужно найти такое $\hat{b}$, что:

$$p\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n \mid \hat{b}\right) \geq p\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n \mid \hat{b}-1\right) \text{ и } p\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n \mid \hat{b}\right) \geq p\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n \mid \hat{b}+1\right).$$

В результате получаем оценку: $\hat{b}=\left[\left(N+1\right)a/n\right]$, т.е. $\hat{b} \approx Na/n$. Последнее выражение означает, что $\hat{\theta}=\frac{\hat{b}}{N} \approx a/n$.