Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 14—19 апреля 2018 года

9—11 класс

Первый тур. Задачи

Дата написания **15 апреля 2018 г.**	
Количество заданий	**4**
Сумма баллов	**24**
Время написания	**180 минут**

Класс 11

Все поля ниже заполняются жюри.
Никаких пометок на титульном листе быть не должно!

Задания	1	2	3	4
Баллы 1 член жюри	6	6	1	6
1 член жюри	5 2	5 6	1 2	5 5
Баллы 2 член жюри	6	6	1	6
2 член жюри	2 6	1 6	2 5	6 6

22343

Задача 1

А). $Q_t = 50 - \frac{P}{2}$, $0 \le P \le 100$; $Q_S = 80 - 2P$, $0 \le P \le 40$ ($80-2P \ge 0 \Leftrightarrow P \le 40$) $\Rightarrow$ необходимо рассмотреть 3 участка цены: $P \in [0;30]$; $P \in [30;40]$; $P \in (40;100]$

$Q_S \le 20$, если $80 - 2P \le 20 \Leftrightarrow 2P \ge 60 \Leftrightarrow P \ge 30$

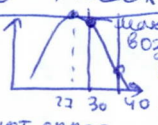
~~$Q_t = \frac{P}{2} = 50 - Q \Rightarrow P = 100$~~

(I) $30 \le P \le 40 \Rightarrow$ предъявляют спрос и студенты, и профессора ($т.к.\ Q_S \le 20$)

кафе „Клюква" максимизирует свою прибыль $\Rightarrow \Pi = P(q_S + q_t) - TC = P(q_S + q_t) - 2(q_S + q_t) = (P-2)(q_S + q_t) = (P-2)(50 - \frac{P}{2} + 80 - 2P) = (P-2)(130 - \frac{5P}{2}) =$

$= -\frac{5P^2}{2} + 130P + 5P - 260 = -\frac{5P^2}{2} + 135P - 260 \to max$. Это парабола ветвями вниз, максимум в вершине

$P_{верш} = \frac{135}{2 \cdot \frac{5}{2}} = 27 \notin [30;40] \Rightarrow \boxed{P_{опт_1} = 30}$ (т.к. $\Pi \downarrow$ от $P=30$ к $P=40$)

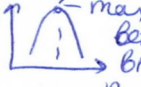


Включается, т.к. профессора всё ещё предъявляют спрос

При $P=30$ $\Pi = (130 - \frac{5}{2} \cdot 30)(30-2) = 55 \cdot 28 = 1540$ +

(II) $P < 30$: предъявляют спрос только студенты, т.к. $Q_S > 20 \Rightarrow q_t = 0$

Тогда $\Pi = P \cdot q_S - 2q_S = q_S(P-2) = (80-2P)(P-2) = -2P^2 + 80P + 4P - 160 =$

$= -2P^2 + 84P - 160 \to max$  $\Rightarrow P_{верш} = \frac{84}{2 \cdot 2} = 21 \in (0;30) \Rightarrow \boxed{P_{опт_2} = 21}$

При $P=21$ $\Pi = (80 - 2 \cdot 21)(21-2) = 38 \cdot 19 = 722$ +

(III) $40 < P \le 100$: спрос предъявляют только профессора

Тогда $\Pi = P \cdot q_t - 2q_t = q_t(P-2) = (50 - \frac{P}{2})(P-2) = -\frac{P^2}{2} + 50P + P - 100 =$

$= -\frac{P^2}{2} + 51P - 100 \to max$ $\Rightarrow P_{верш} = 51 \in (40;100] \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P_{опт_3} = 51}$ При $P=51$ $\Pi = (50 - \frac{51}{2}) \cdot (51-2) = \frac{49}{2} \cdot 49 = 1200,5$

$P=30 \Rightarrow \Pi_1 = 1540$
$P=21 \Rightarrow \Pi_2 = 722$
$P=~~51~~ 51 \Rightarrow \Pi_3 = 1200,5$

$\Rightarrow \max\{\Pi_1; \Pi_2; \Pi_3\} = 1540 = \Pi(P=30) \Rightarrow \boxed{P_{опт} = 30}$ – кафе назначит цену $P=30$

При этом $q_t = 50 - \frac{30}{2} = 35$ – кол-во профессоров; $q_S = 80 - 2 \cdot 30 = 20$ – кол-во студентов

+4

Б). Пусть P_t – цена обеда для профессоров, P_S – цена для студентов

Тогда прибыль кафе составит $\Pi = P_t q_t + P_S q_S = P_t(50 - \frac{P_t}{2}) + P_S(80 - 2P_S) =$

$= \underbrace{-\frac{P_t^2}{2} + 50P_t}_{\text{---}} \underbrace{- 2P_S^2 + 80P_S}_{\text{---}} ~~\to max~~ 2(50 - \frac{P_t}{2} + 80 - 2P_S) = -\frac{P_t^2}{2} + 50P_t + P_t - 2P_S^2 + 80P_S + 4P_S - 100 - 160 =$

$= -\frac{P_t^2}{2} + 51P_t - 2P_S^2 + 84P_S - 260 \to max$

два части выражения не зависят друг от друга $\Rightarrow$ можем максимизировать каждую из них по отдельности и получить максимум прибыли. это 2 параболы ветвями вниз, максимумы в вершинах: ~~$P_t = \frac{50}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 50$~~ $P_t = \frac{51}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 51 \Rightarrow q_t = 50 - \frac{51}{2} = 24,5$

+1

Тогда прибыль кафе составит: $P_S = \frac{84}{2 \cdot 2} = 21 \Rightarrow q_S = 80 - 2 \cdot 21 = 38$

$\Pi = -\frac{51^2}{2 \cdot 2} + 51 \cdot \frac{51}{2} - 2 \cdot 21^2 + 84 \cdot 21 - 260 = 1300,5 + 882 - 260 = 1922,5 > 1540 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кафе „Клюква" будет использовать доп. зам.

В результате этого объём потребления обедов профессорами уменьшится с 35 до 24,5 обедов, а объем потребления обедов студентами вырастет с 20 до 38 шт..

Первоначально профессора платили $30 \cdot 35 = 1050$ д.ед., потом – $51 \cdot 24{,}5 = 1249{,}5$ д.ед. (выросли затраты) $\Rightarrow$ профессора проиграют. Студенты изначально платили $30 \cdot 20 = 600$ д.ед., а затем – $21 \cdot 38 = 798$ д.ед. (выросли) $\Rightarrow$ студенты тоже проиграют

$(30 < 51)$

Первоначально профессора платили меньшую цену и потребляли больше $\Rightarrow$ их положение ухудшилось. Изначально они платили $30 \cdot 35 = 1050$ д.ед., а теперь $51 \cdot 24{,}5 = 1249{,}5$ д.ед..

Студенты раньше платили бóльшую цену $(30 > 21)$ и потребляли меньше $\Rightarrow$ их положение с предоставлением доп. зала улучшилось. Сначала они платили $30 \cdot 20 = 600$ д.ед., а теперь $21 \cdot 38 = 798$ д.ед.

Ответ: А) $P = 30$; Б) $P_t = 51$, $P_s = 21$; профессора проиграли, студенты выиграли.

+1

Задача 2

А). 1) В условиях высокой инфляции люди тратят бо́льшую часть своих доходов на потребление, т.к. $P\uparrow \Rightarrow$ сбережения $S\downarrow \Rightarrow$ люди меньше несут деньги в банки $\Rightarrow$ кредиты $\downarrow \Rightarrow$ $\Rightarrow I\downarrow \Rightarrow$ ВВП $\downarrow$

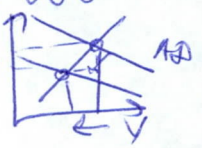
2) Высокие риски стимулируют инвесторов не браться за долгосрочные проекты, т.к. высока вероятность оказаться в убытке $\Rightarrow I\downarrow$, инвестиц. активность $\downarrow \Rightarrow AD\downarrow \Rightarrow$ ВВП $\downarrow$

3) перераспределение дохода: ~~от~~ к богатым от бедных (богатые вкладывают деньги в активы, бедные только потребляют) ↓

4) Обесценивание вкладов (~~процентный~~ доходность вкладов уменьшается)

5) Из-за инфляции бо́льшую популярность приобретает спекуляция, т.к. производство во многих фирмах становится убыточным (большие издержки, цены на ресурсы, $З/п$) $\Rightarrow$ деньги „утекают" из производства $\Rightarrow Y\downarrow$

б) дефляция $\Rightarrow$ из-за дефляционных ожиданий $C\downarrow$, т.к. люди знают, что смогут приобрести товары в будущем дешевле $\Rightarrow AD\downarrow \Rightarrow Y\downarrow$, $P\downarrow \Rightarrow$ дефляция $\Rightarrow$ $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ значительный спад производства.



В). В 2-х годах $(\Pi-4)$, в 2-х – $(\Pi+4)$

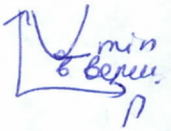
1). $\Pi-4\geq 0 \Rightarrow \Pi\geq 4$

$L=2(\Pi-4)^2+2(\Pi+4)^2=2(2\Pi^2+32)=4\Pi^2+64\to min \Rightarrow$

$\Rightarrow |\Pi|\to min \Rightarrow \Pi=4$, $L=4\cdot 16+64=128$

2). $\Pi-4\leq 0$, $\Pi+4\geq 0 \Leftrightarrow -4\leq\Pi\leq 4$

$L=2\cdot 3(\Pi-4)^2+2(\Pi+4)^2=8\Pi^2-32\Pi+128\to min$



$\Pi=\frac{32}{8\cdot 2}=2 \Rightarrow L=8\cdot 4-32\cdot 2+128=96$

3) $\Pi+4\leq 0 \Leftrightarrow \Pi\leq -4$

$L=2\cdot 3(\Pi-4)^2+2\cdot 3(\Pi+4)^2=6(2\Pi^2+32)\Rightarrow |\Pi|\to min$

$\Rightarrow \Pi=-4 \Rightarrow L=6\cdot(2\cdot 16+32)=384$

$min\{128;96;384\}=96 \Rightarrow \Pi^*_{опт}=2\%$

Ответ: $\Pi^*=2\%$.

Задача 3

[1]

~~Чем больше сумма кратчайших расстояний~~

А) 1) Пусть X расположена на МВ, $MX = x$, $BX = 4 - x$.

Чем больше сумма кратчайших расстояний от свалки до каждого города, тем больше людей проголосуют за этот вариант, т.к. чем дальше свалка, тем лучше для людей.

1) X расположена на МВ, $MX = x \Rightarrow C = MX + BX + БX + KX$ – сумма кратч. расстояний $\to max$

$C = \underset{M}{x} + \underbrace{4-x}_{B} + \underbrace{2+x}_{Б} + \underbrace{3+x}_{K} = 9 + 2x$, ↑ с увелич. $x \Rightarrow x \to max \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ оптим. положение в т. В $\Rightarrow C_1 = 9 + 2 \cdot 4 = 17$

2) ~~X на ВБ, $BX = x$, $БX = 5 - x \Rightarrow C = \underset{B}{x} + \underbrace{5-x}_{Б} + \underbrace{2+(5-x)}_{M} + \underbrace{2+5-x}_{K} \to max \Leftarrow$~~

~~$= 19 - 2x$, ↓ по $x \Rightarrow x \to min \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C_2 = 19$ (X в т. В)~~

3) ~~X на~~

2) X на ВБ, $BX = x$, $БX = 5 - x$, $KX = 2 + 5 - x = 7 - x$

$MX = 2 + 5 - x = 7 - x$ или $MX = 4 + x$; $7 - x \le 4 + x \Leftrightarrow 2x \ge 3 \Leftrightarrow x \ge 1{,}5$

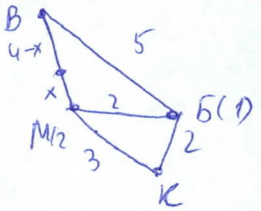
↑ $0 \le x \le 1{,}5 \Rightarrow \min\{7-x; 4+x\} = 4 + x$

$C = x + 5 - x + 7 - x + 4 + x = 5 + 11 = 16$

2) $1{,}5 \le x \le 5 \Rightarrow \min\{7-x; 4+x\} = 7 - x$

$C = x + 5 - x + 7 - x + 7 - x = 5 + 14 - 2x = 19 - 2x \to max \Rightarrow x \to min \Rightarrow x = 1{,}5$

$\Rightarrow C_2 = 19 - 2 \cdot 1{,}5 = 16 \Rightarrow$ для $\forall x \in [0; 1{,}5]$ $C_2 = 16$



3) X на МБ, $MX = x$, $БX = 7 - x \Rightarrow C = x + 2 - x + BX + KX$

$BX = \min\{4+x; 5+2-x\}$ $4 + x \le 7 - x$ при $x \le 1{,}5$

$KX = \min\{3+x; 2+2-x\}$ $3 + x \le 4 - x$ при $x \le 0{,}5$

1) $0 < x \le 0{,}5 \Rightarrow BX = 4 + x$, $KX = 3 + x \Rightarrow C = x + 2 - x + 4 + x + 3 + x = 9 + 2x \to max$

$\Rightarrow x \to max \Rightarrow x = 0{,}5 \Rightarrow C = 9 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 10$

2) $0{,}5 \le x \le 1{,}5 \Rightarrow BX = 4 + x$, $KX = 4 - x \Rightarrow C = 2 + 4 + x + 4 - x = 10$

3) ~~$1{,}5 \le x \le 2$~~ $\Rightarrow BX = 7 - x$, $KX = 4 - x \Rightarrow C = 2 + 7 - x + 4 - x = 13 - 2x \to max$

$\Rightarrow x \to min \Rightarrow x_{опт} = 1{,}5 \Rightarrow C = 10$

4) X на БК: $БX = x$, $KX = 2 - x$, $MX = \min\{2+x; 5-x\}$; $BX = 5 + x$

$2 + x \le 5 - x \Leftrightarrow x \le 1{,}5$

1) $0 \le x \le 1{,}5 \Rightarrow C = x + 2 - x + 2 + x + 5 + x = 9 + 2x \to max$

$\Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow C = 9 + 3 = 12$

2) $1{,}5 \le x \le 2 \Rightarrow C = x + 2 - x + 5 - x + 5 + x = 12$

5) X на МК: ~~MX~~ $MX = x$, $KX = 3 - x$, $BX = 4 + x$, $БX = \min\{2+x; 2+3-x\}$ (5 − x)

$2 + x \le 5 - x \Leftrightarrow x \le 1{,}5$

1) $0 \le x \le 1{,}5 \Rightarrow C = x + 3 - x + 4 + x + 2 + x = 9 + 2x \to max$

$\Rightarrow x \to max \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow C = 12$

2) $1{,}5 \le x \le 3 \Rightarrow C = x + 3 - x + 4 + x + 5 - x = 12$

Киберкот!

Из всех найденных С максимальным является $C = 17$ (при расположении X в гор. В) $\Rightarrow$ за этот вариант будет отдано

Киберкот предлагает сравнивать голоса избирателей от тех, с чем сравнивают

большинство голосов ⇒ X находится в B.

Здесь нужно ещё учитывать население городов. Но т.к. в случае X ≡ B за этот вариант проголосуют 2 млн. человек из города M, то это и есть самый оптимальный (самого населённого) вариант.

Б). Все точки на MB, кроме B (удаляемся от M, Б и К)

Неверно!

(0)

Г). Свалка должна быть в середине дороги, т.к. в противном случае можно сдвинуть её к середине, и тогда ближайший из 2-х городов на концах дороги будет от неё дальше, а оставшийся город ближайшим не станет, т.к. ближайшим останется первый. Значит, можно будет улучшить ситуацию для одного города без ухудшения для других. Это можно будет делать до тех пор, пока свалка не окажется в середине (тогда расстояния сравняются).

Выбирать нужно самую длинную дорогу, чтобы половина дороги была самой длинной. ⇒ оптим. расположение – в середине дороги БВ.

(1)

Задача 4

б) Сначала объем инвестиций выбирает Клара ⇒ ⇒ Марфа воспринимает K как параметр. Клара может предсказать M в зависимости от K.

Марфа: $X_K = \frac{1,6(K+M)}{2} - K = 0,8M - 0,2K$

$X_M = \frac{1,6(K+M)}{2} - M = 0,8K - 0,2M$

Марфа: $U_M = 0,8K - 0,2M - \alpha \max(0,8M - 0,2K - 0,8K + 0,2M; 0) - \beta \max(0,8K - 0,2M - 0,8M + 0,2K; 0) = 0,8K - 0,2M - \alpha \max(M-K; 0) - \beta \max(K-M; 0)$

1) $M \geq K \Rightarrow U_{M_1} = 0,8K - 0,2M - \alpha M + \alpha K - 0 = K(0,8+\alpha) - M(0,2+\alpha)$

2) $M < K \Rightarrow U_{M_2} = 0,8K - 0,2M - 0 - \beta K + \beta M = K(0,8-\beta) + M(\beta - 0,2)$

$U_{M_1} \geq U_{M_2}$, если $K(0,8+\alpha) - M(0,2+\alpha) - K(0,8-\beta) - M(\beta - 0,2) \geq 0$

$\Leftrightarrow K(\alpha+\beta) - M(\alpha+\beta) \geq 0 \Leftrightarrow K \geq M$; U_{M_1} испол. при $M \geq K \Rightarrow \underline{M = K}$

~~Если $K = M$, то $U_M = 0,6K - 0,6M$~~

$M \geq K \Rightarrow U_M = K(0,8+\alpha) - M(0,2+\alpha)$; $\alpha > 0 \Rightarrow 0,2+\alpha > 0 \Rightarrow U_M \downarrow$ по M

$\Rightarrow M = M_{min} \Rightarrow M = K \Rightarrow U_M = 0,6K - 0,6M$ (1)

$M < K \Rightarrow U_M = K(0,8-\beta) - M(0,2-\beta)$, если $0,2-\beta > 0$, то $U_M \downarrow$ по M ($\beta < 0,2$) $\Rightarrow M \to min \Rightarrow M = 0$

$\Rightarrow U_M = K(0,8-\beta) > 0,6K$

если же $0,2-\beta < 0$, то $U_M \uparrow$ по $M \Rightarrow M \to max \Rightarrow M = 100$ тыс.р.

$\beta > 0,2 \Rightarrow U_M = K(0,8-\beta) - 100(0,2-\beta)$

если $\beta = 0,2$, то $U_M = K(0,8-\beta) = 0,6K$, M - без разницы

~~При $M < K$ есть вариант~~ $\Rightarrow M = M_{max} = 100$ тыс.

Клара: 1) $M \geq K \Rightarrow U_K = 0,8(K+K) - K = 0,6K$

2) $M \leq K$: 1) $\beta < 0,2 \Rightarrow M = 0$

$U_K = 0,8M - 0,2K - \alpha \max(K-M; 0) - \beta \max(M-K; 0) =$

$= 0,8M - 0,2K - \alpha K + \alpha M = M(0,8+\alpha) - K(0,2+\alpha) = -K(0,2+\alpha) \leq 0$

$\Rightarrow K_{опт} = 0$ - не подходит

2) $\beta = 0,2 \Rightarrow M = 100$ тыс.

$U_K = 100(0,8+\alpha) - K(0,2+\alpha)$ ↓ по K ($K \to min$, $M \leq K$) $\Rightarrow K_{опт} = M$

$\Rightarrow U_K = 100(0,8+\alpha) - 100(0,2+\alpha) = 100 \cdot 0,6 = 60 > 0$

Клара заработала,

$U_M = K(0,8-\beta) = 0,6K$

$= 0,6 \cdot 100 = 60$

Марфа не заработала

⇒ любая пара $(\alpha; \beta)$ вида $(\alpha; 0,2)$, $\alpha > 0$ подходит

б

3) $\beta > 0{,}2 \Rightarrow M = 100$ тыс.р $\Rightarrow U_к = M(0{,}8+\alpha) - k(0{,}2+\alpha) =$
$= 100(0{,}8+\alpha) - k(0{,}2+\alpha)$ ↓ по $k \Rightarrow k_{опт} = 100$ тыс. р.
$\Rightarrow k \to min \Rightarrow k = M = 100$ тыс.

$\Rightarrow U_к = 0{,}6 \cdot 100 = 60$ тыс. р > 0
$U_м = 100(0{,}8-\beta) - 100(0{,}2-\beta) = 100 \cdot 0{,}6 = 60$ тыс. р, > 0
$\Rightarrow$ обе заработали $\Rightarrow$ любая пара, где $\beta > 0{,}2$ также подходит.

3) $M \gg K \Rightarrow M = K$; $U_м = 0{,}6K = 0{,}6M$
$U_к = 0{,}8(k+k) - k = 0{,}6K$

Ответ: ~~нет~~ ограничения: $\beta \geq 0{,}2$, α - любое

Дополнительный лист