Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 14—19 апреля 2018 года

9—11 класс

Первый тур. Задачи

Дата написания	**15 апреля 2018 г.**
Количество заданий	**4**
Сумма баллов	**24**
Время написания	**180 минут**

Класс 11

Все поля ниже заполняются жюри.
Никаких пометок на титульном листе быть не должно!

Задания	1	2	3	4
Баллы 1 член жюри	6	6	6	6
1 член жюри	2 6	2 6	2 4	4 3
Баллы 2 член жюри	6	6	3	6
2 член жюри	1 8	2 5	4 4	6 6

22502

Задача 1

а) $Q_1 = 50 - P/2$ $\quad P \le 100$ $\quad P = 100 - 2Q_1$

$Q_2 = 80 - 2P$ $\quad P \le 40$ $\quad P = 40 - 0{,}5Q_2$

Случай 1: Обедают только профессора (т.е. кафе назначает цену $P > 40$)

$TR = (100 - 2Q_1)Q_1 = -2Q_1^2 + 100Q_1$

$MR = -4Q_1 + 100$

$MC = 2$ $\rightarrow$ $MR = MC$ (макс. прибыли)

$-4Q_1 + 100 = 2$

$4Q_1 = 98$

$Q_1 = 24.5 \rightarrow P = 51 > 40$ ✓ +

$\rightarrow$ прибыль фирмы:

$PQ - TC = 51 \cdot 24{,}5 - 2 \cdot 24{,}5 =$

$= 49 \cdot 24{,}5 = 1200.5$ +

Случай 2: Едят только студенты (т.е. кафе назначает цену $P \le 40$, но $Q_2 > 20$

$80 - 2P > 20$

$60 > 2P$

$\boxed{30 > P}$

$TR = (40 - 0{,}5Q_2)Q_2 = 40Q_2 - 0{,}5Q_2^2$

$MR = 40 - Q_2^2$

$MC = 2$ $\rightarrow$ $MR = MC$

$40 - Q_2 = 2$

$Q_2 = 38 \rightarrow P = 21 < 30$ ✓ +

$\rightarrow$ прибыль фирмы:

$PQ - TC = 21 \cdot 38 - 2 \cdot 38 =$

$19 \cdot 38 = 722$ +

Случай 3: Едят и профессора, и студенты (т.е. $30 \le P \le 40$)

Общий спрос: $\underbrace{Q_1 + Q_2}_{Q} = 130 - \frac{5P}{2} \rightarrow P = \frac{2(130 - Q)}{5} = 52 - 0{,}4Q$

$30 \le P \le 40 \rightarrow \boxed{30 \le Q \le 55}$

$TR = (52 - 0{,}4Q)Q = 52Q - 0{,}4Q^2$

$TC = 2Q$

$\pi = TR - TC = -0{,}4Q^2 + 50Q$

парабола с ветвями вниз

вершина в $Q^* = \frac{50}{0{,}8} = 62.5$

$Q \in [30; 55]$

$\Downarrow$

max в $Q = 55 \rightarrow P = 30$

прибыль фирмы: $PQ - TC = 30 \cdot 55 - 2 \cdot 55 =$

$= 28 \cdot 55 = 1540$ +

Больше, чем во всех случаях.

Ответ: 30

4б.

б) Пусть у них есть раздельные залы.

Зал-1: Спрос студентов

$P = 40 - 0{,}5\,Q_2$

$TR = PQ = (40 - 0{,}5\,Q_2)\,Q_2$

$MR = 40 - Q_2$

$MC = 2$

$MR = MC$

$40 - Q_2 = 2$

$Q_2 = 38 \rightarrow P_2 = 21$

$\downarrow$

$\pi = 722$

Зал-2: Спрос профессора

$TR = (100 - 2Q_1)\,Q_1$

$MR = 100 - 4Q_1$

$MC = 2$

$\rightarrow MR = MC$

$-4Q_1 + 100 = 2$

$Q_1 = 24{,}5$

$P_1 = 51$

$\downarrow$

$\pi = 1200{,}5$ +

$\rightarrow \pi = 1922{,}5 \leftarrow$ +

Важное примечание: TC - линейно от q → MC - const → для двух рынков MC не меняется

Таким образом цена за студ. и проф. 21 и 51 соотв., цена для проф. увели, для студентов уменьш, прибыль фирмы увели. Отсюда профессора пров, остальные вытеснят +

Ответ.

2б.

Задача 2

а) + 1. „Издержки стоптанных башмаков": экономические агенты несут издержки из-за того, что им невыгодно держать капитал в наличности => им приходится его ~~дев~~ вкладывать, чтобы не терять реальную стоимость. (Издержки - поиск туда, куда можно вложить) ~~чтобы не потерять~~

+ 2. „Издержки меню": экономические агенты несут дополнительные издержки из-за того, что им приходится менять цены на свои товары и услуги (частая смена цен влечет за собой неточность, а следовательно убыток. Также ресурсы на определение новой цены входят в „издержки меню")

б) + Если экономический агент ожидает дефляцию, то он сокращает свое потребление, т.к. в будущем цена его денег увеличится, и любой товар можно купить дешевле. Производители же в ответ на снижение спроса, снижают цену, чтобы ~~что-нибудь~~ максим. прибыль. ~~Цена~~ Средняя цена уменьшается => дефляция прогрессирует. Покупатели еще сокращают потребление.

В отличие от инфляции, дефляция более болезненна для экономики, потому что ее гораздо сложнее сокращать. Сложно изменить инфляционное ожидание населения, т.к. при попадании денег, они их не тратят, усиливая эффект.

в) Пусть $\pi^* \in [4;\infty)$

$\pi^*+4>0$

$\pi^*-4\geq 0$

$L=\sum_{i=1}^{i=4} L_i = 2(\pi^*+4)^2+2(\pi^*-4)^2=$

$=2(2\pi^{*2}+32)=4(\pi^{*2}+16)$

парабола с ветвями вверх

вершина в $\pi^{*\prime}=0$

отсюда на полуинтервале $[4;\infty)$ функц. монотонно возрастает

min в $\pi^*=4$

$L=4(16+16)=4\cdot 32=128$

Пусть $\pi^*\in(-4;4)$

$\pi^*+4>0$

$\pi^*-4<0$

$L=\sum_{i=1}^{i=4} L_i = 2(\pi^*+4)^2+6(\pi^*-4)^2=$

$=2(\pi^{*2}+8\pi^*+16+3\pi^*-24\pi^*+48)=$

$=2(4\pi^{*2}-16\pi^*+64)=8(\pi^{*2}-4\pi^*+16)$

парабола с ветвями вверх

min в вершине

$\pi^*=\frac{4}{2}=2$

$L=8(4-8+16)=8\cdot 12=96$

Пусть $\pi^* \in (-\infty; -4]$

$\pi^* + 4 \le 0$

$\pi^* - 4 < 0$

$$L = \sum_{i=1}^{i=4} L_i = 6(\pi^*+4)^2 + 6(\pi^*-4)^2 =$$

$$= 6(2\pi^{*2} + 32) = 12(\pi^{*2} + 16)$$

парабола с ветвями вверх

вершина в $\pi^* = 0$

$\Rightarrow$ на полуинтервале $(-\infty; -4]$ она монотонно убывает

минимум в $\pi^* = -4$

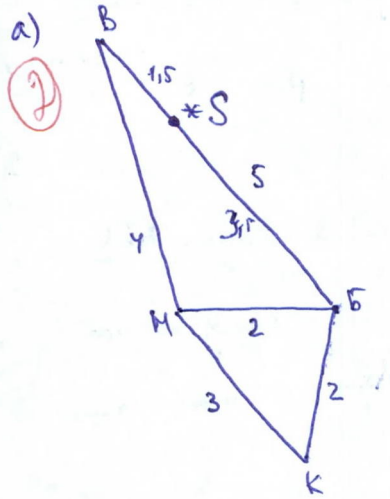
$L = 12 \cdot 32 = 384$

Отсюда легко понять, что L-min во втором случае при $\pi^* = 2$

$\boxed{\text{Ответ: } 2}$

Задача 3

а)



Для начала докажем, что точка S, отмеченная на дороге ВБ : BS = 1,5, SБ = 3,5 – оптимальна для города М.

Расстояние от города М до S = 5,5 км.

Если S лежит на дорогах ВМ, МБ и МК, то расстояние до свалки будет ≤ 4, 2, 3 соотв, что меньше или равно 5,5

Пусть S на отрезке БК: SБ = x.

тогда расстояние от М до S = min (2+x, 5−x)

при $x < 1,5$: $2+x < 5-x$, $2+x < 3,5$

при $x \geq 1,5$: $2+x \geq 5-x$, $5-x \leq 3,5$

max расстояние 3,5 < 5,5

Пусть S на отрезке ВБ: BS = y

тогда расстояние от М до S = min (4+y, 7−y)

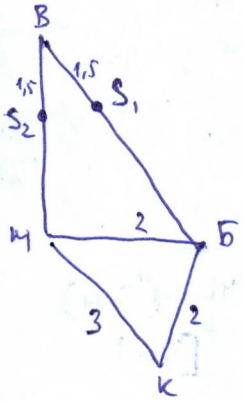
при $y < 1,5$: $4+y < 7-y$, $4+y < 5,5$

при $y \geq 1,5$: $4+y \geq 7-y$, $7-y \leq 5,5$

max расстояние 5,5 при том равенство в точке S

$\boxed{\text{Точка S – оптимум для М, что}}$

Пусть существует S', победив точку S. Т.к. ∀ S' ~~точка~~ город М будет голосовать против (S' наимум. единств. место), то оставшиеся города должны голосовать строго за точку S' (Если хотя бы один проголосует „все равно" или „против", то будет или ничья, или победа S)



1. Если $S' \in [BS_1]$ или $[BS_2]$, то город В против.
2. Если $S' = S_2$, то городам В и К все равно.
3. Если $S' \in [S_2M]$, $[S_1Б]$, $[MK]$, $[KБ]$, то город К против.
4. Если $S' \in [MБ]$, город Б против.

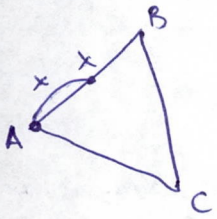
Отсюда точка S доминирует

б) Лемма: $\triangle ABC$, p - ~~периметр~~ периметр $\triangle ABC$. $X \in \triangle ABC$

~~т.~~ S от A до X по сторонам $\triangle \leq \frac{p}{2}$.

3

Д-во:



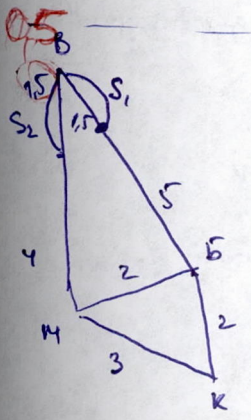
Пусть расстояние от A до X по одной стороне x.

Тогда в другую сторону $p-x$ и других нет способов.

По принципу дирихле либо x, либо $p-x \leq \frac{p-x+x}{2} = \frac{p}{2}$

это и есть расстояние, что

0,5



Расстояние от любой вершины $\triangle$ МБК до любой точки $\triangle$ МБК по лемме $\leq \frac{2+2+3}{2} = 3{,}5$. Отсюда если свалка находится на $\triangle$ МБК, то, выбрав точку $Z = B$, все три города проголосуют „за"

$\Rightarrow$ $\triangle$ МБК - неудачное место.

Если $Y \in (S_1 Б]$, то можно перешагнуть в $Z = S_1$

города М, Б, К проголосуют „за"

Если $Y \in (S_2 M]$, то можно перешагнуть в $Z = S_2$

города М, Б, К проголосуют „за"

Если $Y \in (S_1 B]$, то ~~можно перешагнуть в $Z = S_1$~~

~~города М, В, К проголосуют~~

не существует такой точки Z, что проголосуют три города.

За любую точку на $[S_1 B]$ ближе к В будут против города М и В.

За любую точку на $[S_1 B]$ дальше от В будут против города Б и К.

За точку на $[M$ ...

Если $Y = S_1$, то $Z = S_2$

Если $Y \in (S_2 B]$, то не существует такой точки Z, что проголосуют три города

аналогично предыдущему пункту.

Ответ: Все точки на отрезках [МБ], [БК], [МК], [S_2М], [S_1Б]

Продолжение на доп. листе.

Задача 4

$$X_K = \frac{1{,}6(M+K)}{2} + (100-K) = 100 - 0{,}2K + 0{,}8M$$

$$X_M = \frac{1{,}6(M+K)}{2} + (100-M) = 100 - 0{,}2M + 0{,}8K$$

$$X_K - X_M = M - K$$

$$X_M - X_K = K - M$$

Пусть Клара положила K тыс. руб. Посмотрим сколько положит Марфа.

$$U_M = \cancel{\ldots} - \alpha \max(M-K, 0) - \beta \max(K-M, 0) + 100 - 0{,}2M + 0{,}8K$$

Пусть $M \geq K$

$U_M = 0{,}8(M+K) - \alpha(M-K) =$

$= (0{,}8-\alpha)M + (0{,}8+\alpha)K \rightarrow$

линейная функция от M. • Если $0{,}8-\alpha \leq 0$ $(0{,}8 \leq \alpha)$, то max при min M $\Rightarrow$

$M = K \rightarrow U_M = 1{,}6K$

• Если $\alpha < 0{,}8$, то max при M max $\rightarrow M = 100$

$U_M = (0{,}8-\alpha)\cdot 100 + (0{,}8+\alpha)K$

$80 - 100\alpha + 0{,}8K + \alpha K \longrightarrow$ Знаю, что $100 \geq K$

$\frac{80-100\alpha}{0{,}8-\alpha} \geq K$

$80 - 100\alpha \geq K(0{,}8-\alpha)$ $\alpha < 0{,}8$

$80 - 100\alpha + \alpha K \geq 0{,}8K$

$80 - 100\alpha + \alpha K + 0{,}8K \geq 1{,}6K$

Пусть $M \leq K$

$U_M = 0{,}8(M+K) - \beta(K-M) =$

$= (0{,}8+\beta)M + (0{,}8-\beta)K \longrightarrow$ линейная функция от M, $0{,}8+\beta > 0 \Rightarrow$ max при max $M \Rightarrow M = K$

$= 1{,}6K$

первый случай всегда более выгодный, чем второй при $\alpha < 0{,}8$

при $\alpha \geq 0{,}8$ уводим в $M = K$.

Клара знает реакцию Марфы на свои действия.

Пусть $\alpha < 0{,}8$. Тогда

$$U_K = X_K - \alpha \max(X_M - X_K, 0) - \beta \max(X_K - X_M, 0) = 0{,}8(K+100) - \beta(100-K) =$$

$$= (0{,}8+\beta)K + 80 - 100\beta$$

лин функция от K., $0{,}8+\beta > 0 \Rightarrow$ max при max K

$K = 100$

~~Пусть $\alpha \geq 0{,}8$. Тогда $k=M$ $U_k = 0{,}8(M+k) = 1{,}6k$~~

~~Легко заметить, что и в первом, и во втором случае девушки заработают.~~

~~В одном случае по 60 тыс. р., в другом случае $0{,}6k$ (Клара max прибыль => => $k=100$ => прибыль тут также $= 60$)~~

~~Ответ: при любых $\alpha, \beta > 0$.~~

Пусть $M \geq k$

$100 - 0{,}2M + 0{,}8k - \alpha(M-k) =$

$= 100 - (0{,}2+\alpha)M + 0{,}8k + \alpha k$

лин. функция с отр. коэф.

⇓

max при M-min

$\boxed{M=k}$

+1

↓

$U = 100 + 0{,}6k$

Пусть $M \leq k$

$100 - 0{,}2M + 0{,}8k - \beta(k-M) =$

$= (\beta - 0{,}2)M + 100 + 0{,}8k - \beta k$

$U = 100 + 0{,}8k - \beta k$

Если $\beta \leq 0{,}2$, то это лин. функция с отр. коэф => max при M-min →

$\boxed{M=0}$ +1

Если $\beta > 0{,}2$, то max при M-max →

$\boxed{M=k}$ +1

$U = 100 + 0{,}6k$

при $\beta \leq 0{,}2 \to M=0$

$\beta > 0{,}2 \to M=k$

Клара знает реакцию Нарфи на ее действия:

~~$U = 100$~~ Если $\beta \leq 0{,}2$, то $M=0$:

$U = 100 - 0{,}2k + 0{,}8M - \alpha(k-M) =$

$= 100 - 0{,}2k - \alpha k$

max при k-min

т.к. это лин. функц. с отр. старш. коэф.

$\boxed{k=0}$

Если $\beta > 0{,}2$, то

$M=k$

$U = 100 - 0{,}2k + 0{,}8M = 100 + 0{,}6k$

↓

max при k-max

$k=100$

6

Легко заметить, что при $\beta > 0{,}2$ девушки заработывают 60 тыс.

Ответ: при $\beta > 0{,}2$

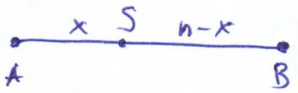
α – любое.

Дополнительный лист

1

* Задача 3* → продолжение.

Пусть свалка стоит на отрезке. AB. Очевидно, ближайшие города до свалки, либо A, либо B (все пути идут из других городов через них)



пусть S ближе к A. Тогда $x \leq n-x$. Сделаем, чтобы x — максимал.

$$x \leq n-x$$

$$x+n-x=n$$

равенство посередине. ← $x \leq \frac{n}{2}$

Тогда нужно выбрать такой отрезок длины n, что x — max. ⇒ n — max в данном случае n=5

Ответ: → (середина отрезка BE)