Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 14—19 апреля 2018 года

9—11 класс

Второй тур. Задачи

Дата написания	**16 апреля 2018 г.**
Количество заданий	**4**
Сумма баллов	**24**
Время написания	**180 минут**

Класс 11

Все поля ниже заполняются жюри.
Никаких пометок на титульном листе быть не должно!

Задания	5	6	7	8
Баллы 1 член жюри	0	6	5	5
1 член жюри	83	78	52	61
Баллы 2 член жюри	0	6	3	5
2 член жюри	61	32	56	73

22619

Задача 5 Почему это не работает для бедных?

(а) Богатые домохозяйства понимают, что высокие прибыли не могут продолжаться вечно, когда-нибудь наступит кризис, и их доходы упадут, поэтому чтобы не так сильно ощущать скачки доходов, они сохраняют часть своих доходов „на черный день", сглаживая своё потребление.

Точно?

Для бедных домохозяйств доходов может быть недостаточно для того, чтобы откладывать их, сглаживая своё потребление; также оставленные на завтра деньги могут обесцениться, поэтому они предпочтут купить сегодня необход. товаров побольше, чем завтра поменьше. Для богатых домохозяйств этот эффект слабее, поэтому они могут позволить потерять себе часть своих средств на инфляции, чем остаться завтра вообще без денег

(б) 1. Если у нас есть данные по доходам и расходам д.х-в за 7 лет, мы можем посмотреть, увеличивалось ли их потребление до роста доходов или только при увеличении этого дохода, аналогично для снижения доходов — готовились ли д.х-ва заранее или нет

Вывод: подтвердим гипотезу

2. В целом, экономические процессы, такие как кризис, инфляция должны более-менее равномерно влиять на ~~все~~ доходы всех д.х-в., поэтому мы можем посмотреть средний уровень потребления и доходов и посмотреть когда они начинали увеличиваться / падать — одновременно или сначала потребление, а уже затем доходы

Задача 6

(а) $U(h,c) = Ah\cdot\left(1-\frac{1}{c}\right) = \frac{Ah(c-1)}{c} = \frac{A(y-c)(c-1)}{c} \to \max_c$

$h+c=y$

$$U' = A\frac{(-c+1+y-c)c-(-c^2+yc+c-y)}{c^2} = 0$$

$$-c^2 \cancel{+c} \cancel{+yc} \cancel{-c^2} \cancel{+c^2} \cancel{-yc} \cancel{-c} + y = 0$$

$$c^2 = y$$

$$c^* = \sqrt{y}$$

x2

Проверим, max ли это

$U(c=y) = 0$

$U(c=\sqrt{y}) = \frac{A\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)^2}{\sqrt{y}} = Ay - 2A\sqrt{y} + A$

$U(c\sqrt{y}) > 0$

$y - 2\sqrt{y} + 1 > 0$

$(\sqrt{y}-1)^2 > 0$

$\sqrt{y} - 1 > 0$

$\sqrt{y} > 1$

$y > 1$ – верно.

$$h^* = y - \sqrt{y}$$

(б) $y_A > y_B$

$\sqrt{y_A} > \sqrt{y_B}$

т.к. $y_A > 1$

$y_B > 1$

$h_A \quad h_B$

~~$y_A - \sqrt{y_A} \quad y_B - \sqrt{y_B}$~~

~~$y_A - y_B \quad \sqrt{y_A} - \sqrt{y_B}$~~

~~$\Delta y \quad \sqrt{y_B + \Delta y} - \sqrt{y_B}$~~

~~Пусть $y_A = y_B + \Delta y$~~

~~$\Delta y > 0$~~

$f(x)\ x - \sqrt{x}$ – возрастающая ф-я для $x > 1$

при этом $f(1) = 0 \Rightarrow$ она еще и положительна.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{x}} < 1 \overset{\text{считаем, что } x>0}{\iff} 2\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$.

+2

$\Rightarrow y_A > y_B \iff h_A > h_B$

С ростом доходом „потребление“ здоровья растет

Ясно, что $\sqrt{y}$ растет медленнее $f(y_A) > f(y_B)$ ~~При этом~~ $\cancel{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)}$ = он растет быстрее чем рост доходов

y для $y>1$, значит $h = y - \sqrt{y}$ растет ... $\Rightarrow$ здоровье – товар роскоши (с.м. оборот) (в) При росте доходов населения растут и расходы на здравоохранение. В США во второй половине XX века наблюдался сильный рост экономики, а следовательно, и доходов населения, поэтому расходы на здравоохранение увеличились.

Ответ: (а) $h^* = y - \sqrt{y}$, $c^* = \sqrt{y}$. (б) $h_A > h_B$, товар роскоши.

+2

Задача 7

(a) $y_L = 50 b_L$ $\qquad y_L = (b_L + 0,25 b_R) x_L$

$y_R = 100 b_R$ $\qquad y_R = (b_R + 0,25 b_L) \cdot x_R$

$b_L + x_L = 160$

$b_R + x_R = 200$

$y_L = (b_L + 0,25 b_R)(160 - b_L) = -b_L^2 + b_L(160 - 0,25 b_R) + 0,25 b_R \cdot 160 \to \max_{b_L}$

Это парабола отн b_L, ветви вниз, max в вершине

$b_L^* = \frac{160 - 0,25 b_R}{2} = 80 - \frac{1}{8} b_R$

$y_R = (b_R + 0,25 b_L)(200 - b_R) = -b_R^2 + b_R(200 - 0,25 b_L) + 0,25 b_L \cdot 200 \to \max_{b_R}$

Это парабола отн b_R, ветви вниз, max в вершине

$b_R^* = \frac{200 - 0,25 b_L}{2} = 100 - \frac{1}{8} b_L$

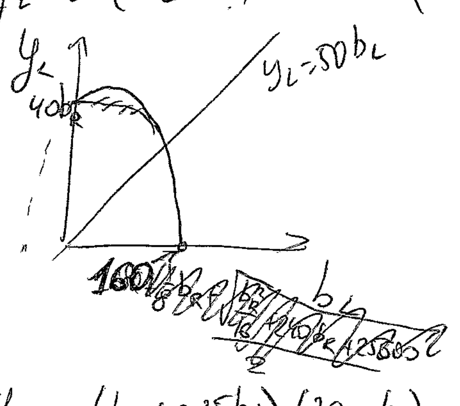
$b_R = 100 - \frac{1}{8} b_L = 100 - \frac{1}{8}\left(80 - \frac{1}{8} b_R\right) = 100 - 10 + \frac{1}{64} b_R$

$\frac{63}{64} b_R = 90 \Rightarrow b_R^* = 91\frac{3}{7} \Rightarrow b_L^* = 68\frac{4}{7}$

$x_R^* = 108\frac{4}{7}$ $\qquad x_L = 91\frac{3}{7}$

$y_L =$

$y_L = (b_L + 0,25 b_R)(160 - b_L) = -b_L^2 + b_L(160 - 0,25 b_R) + \cancel{0,25} \, 40 b_R$



$b_L^2 - b_L(160 + 0,25 b_R) - 40 b_R = 0$

$D = 160^2 + 0,25^2 b_R^2 + 80 b_R + 160 b_R$

$b_L = \frac{160 + 0,25 b_R \pm \sqrt{\frac{b_R^2}{16} + 240 b_R + 25600}}{2}$ т.к. пол.

$\sqrt{\ldots} = (160 + 0,25 b_R)$

$\begin{cases} b_L = 160 & \text{подх} \\ b_L = -0,25 b_R & \text{не подх} \end{cases}$

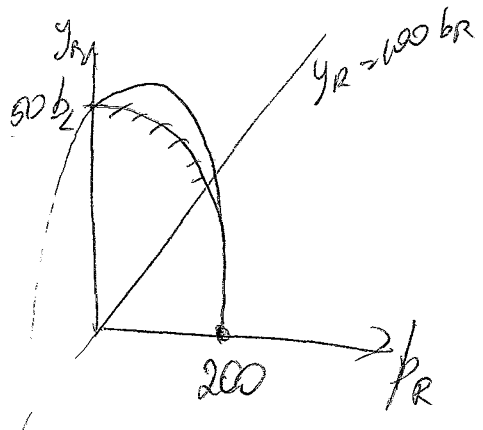
$b_R^2 - b_R(200 - 0,25 b_L) - 50 b_L = 0$

$D = (200 + 0,25 b_L)^2 + 50 \cdot 4 b_L = (200 + 0,25 b_L)^2$

$b_R = \begin{cases} 200 & \text{подх} \\ -0,25 b_L & \text{не подх} \end{cases}$

$y_R = (b_R + 0,25 b_L)(200 - b_R) = -b_R^2 + b_R(200 - 0,25 b_L) + 50 b_L$

$\boxed{\text{см. оборот}}$



Проведем прямые $y_L = 50 b_L$ и $y_R = 100 b_R$ соотв.

$$50 b_L = -b_L^2 + 160 b_L - 0{,}25 b_L b_R + 40 b_R \quad (*)$$

$$\cancel{b_L^2 - 110 b_L + 0{,}25 b_L b_R - 40 b_R = 0}$$

$$\cancel{D_1 = (110 - 0{,}25 b_R)^2 + 4\cdot 40 b_R} = 12100 - 55 b_R + \tfrac{1}{16} b_R^2 + 160 b_R$$

$$\cancel{b_L = \frac{110 - 0{,}25 b_R \pm \sqrt{D_1}}{2}}$$

$$100 b_R = -b_R^2 + 200 b_R - 0{,}25 b_L b_R + 50 b_L \quad (**)$$

$(*) - (**)$: $50 b_L - 100 b_R = 160 b_L - 200 b_R + 40 b_R - 50 b_L$

$60 b_L = 60 b_R$ а где $-b_L^2$ и $-b_R^2$?

$\Downarrow$

в оптимуме $b_L = b_R$

$$\cancel{y_L = 1{,}25 b_L \cdot 160 - 1{,}25 b_L^2 \to \max_{b_L}}$$

$$\cancel{b_L^* = \frac{1{,}25 \cdot 160}{1{,}25 \cdot 2}} =$$

$y_L = 50 b_L$
$y_R = 100 b_L$ $\Rightarrow 2 y_L = y_R$

$x_R - x_L = 40$

$$2 \cdot \cancel{1{,}25} b \cdot x_L = \cancel{1{,}25} b \cdot x_R$$

$x_R = 2 x_L$

$x_L = 40 \Rightarrow x_R = 80 \Rightarrow b_L = b_R = 120$.

$\Rightarrow y_L = 6000$; $y_R = 12000$. +3

Ответ: (а) $b_L = b_R = 120$; $y_L = 6000$; $y_R = 12000$.

(б) $Y = y_1 + y_2$ $\quad B = b_1 + b_2$

$$Y = (b_L + 0{,}25 b_R)(160 - b_L) + (b_R + 0{,}25 b_L)(200 - b_R) =$$

$$= 210 b_L + 240 b_R - b_L^2 - b_R^2 - 0{,}5 b_L b_R \to \max_{b_L, b_R}$$

Это парабола отн b_L, ветви вниз, max в верш.

$b_L^* = \frac{210 - 0{,}5 b_R}{2} = 105 - \frac{b_R}{4}$

см. доп. лист

Задача 8

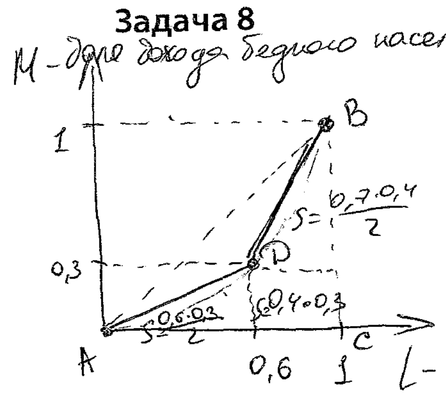
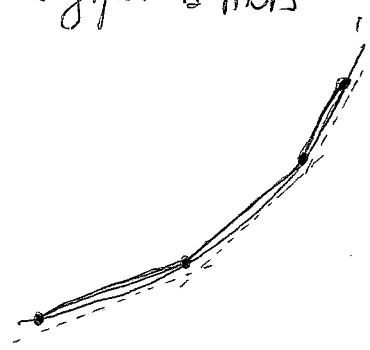


График кривой Лоренца должен проходить ч/з точки A, D и B, причем он должен быть ~~выпуклой~~, OK т.е. значение его производной в точке должно не убывать, иначе мы получим, что у части бедного населения доходы выше, чем у более богатой группы, чего быть не может.

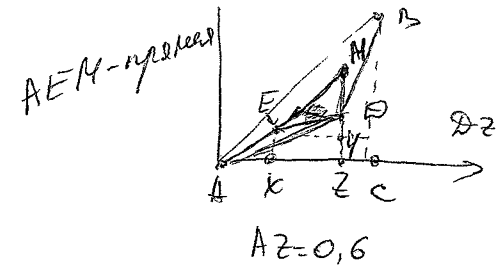
$$G = \frac{S_{\text{между } AB \text{ и кривой } ADB}}{S_{\Delta ABC}}$$

Заметим, что ни одна точка кривой Лоренца не может лежать внутри ΔADB, т.к. для любых точек ~~выпуклой~~ прямой тангенс угла наклона ~~касатель~~ отрезка, соединяющего две соседние точки выборки равен значению производной какой-то точки между ними, однако значение производной не убывает => и тангенс углов наклона этих отрезков не убывает.



Теперь возьмем точку E внутри ΔADB

1° $x_E < 0,6$



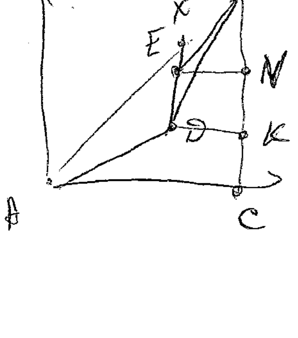
$tg\angle EAC > tg\angle DAC$

$tg\angle DEY < tg\angle MEY = tg\angle MAZ$

$\Rightarrow tg\angle DEY < tg\angle EAC$, чего быть не может

2° $x_E = 0,6$ – не может быть, т.к. тогда прямая DE будет вертикальна и пересечет AB не в точке B, чего быть не может

3° $x_E > 0,6$



$DE \cap AB = X$, $K \in AB$

$tg\angle NEB < tg\angle NEK = tg\angle KDE$, чего быть не может => E не может лежать внутри ΔADB

см. оборот

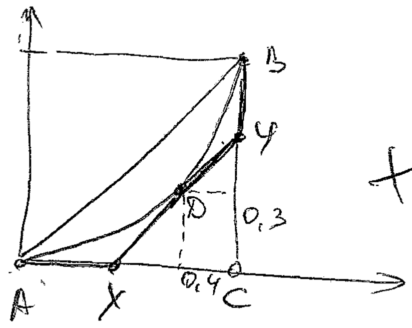
м/ду AB и кривой ADB (а, значит, и G)

=> Наименьшая площадь будет достигаться, когда кривая Лоренца есть два отрезка: AD и AB (она удовлетворяет её свойствам, а значит, подходит, стать её площадь мы не можем из доказанного выше.

$$G_{min} = \frac{1/2 - \frac{0,6 \cdot 0,3}{2} - \frac{0,7 \cdot 0,4}{2} - 0,4 \cdot 0,3}{1/2} = 0,3$$

+2

Заметим, что если ADB − кривая, мы можем провести касательную к ней ч/з точку D и кривая состоящая из отрезков AX, XY и YB также будет подходящей кривой Лоренца, однако её площадь будет больше

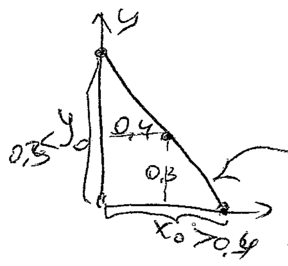


+1

Найдем максимальную площадь ABXY среди всех возможных XY, проходящих ч/з D:

Это равносильно найти min S прямоуг. треуг.-ка, гипотенуза которого проходит ч/з точку (0,4; 0,3), а прямой угол − оси координат

+1



Эта прямая задаётся уравнением $y = y_0 - \cancel{0,75}\frac{y_0}{x_0}x$

$\Rightarrow$ $0,3 = y_0 - \frac{y_0 \cdot 0,4}{x_0}$

$S = \frac{x_0 \cdot y_0}{2} = \cancel{...}$

$y_0\left(1 - \frac{0,4}{x_0}\right) = 0,3 \qquad y_0 = \frac{0,3x_0}{x_0 - 0,4}$

$S' = \frac{0,3x_0^2}{2(x_0 - 0,4)} \longrightarrow \min_{x_0}$

$S'' = \frac{0,3 \cdot 2x_0(x_0 - 0,4) - 0,3x_0^2 \cdot 1}{2\,(x_0 - 0,4)^2} = 0$

$\cancel{S'' = \frac{0,3x_0^2 - 0,24x_0}{(x_0-0,4)^2} = 0}$

$\cancel{S'' = (0,6x_0 - 0,24)(x_0 - 0,4)^2 - (0,3x_0^2 - 0,24x_0)}$

$0,3x_0^2 - 0,24x_0 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \text{ − не подходит} \\ x_0 = 0,8 \end{array}\right.$ почему это подходит?

$S(1) = 0,25$ (нет проверки ограничений) (почему 1 балл) [см. доп лист]

$S(0,8) = 0,24$ → значит, это правда min

Дополнительный лист

Задача 8 (прод)

$$G_{max} = \frac{1/2 - 0,24}{1/2} = 0,52$$

+1

Ответ: $G_{MIN} = 0,5$; $G_{max} = 0,52$.

Задача 7 (прод)

$$Y = 210 \cdot 105 - 210 \cdot \frac{b_R}{4} + 240 b_R - \left(105 \cdot \frac{b_R}{4}\right)^2 - b_R^2 - 0,25 \cdot 105 b_R + 0,5 \cdot \frac{b_R^2}{4} =$$

$$= 33075 + 187,5 b_R - 0,9375 b_R^2 \to \max_{b_R}$$

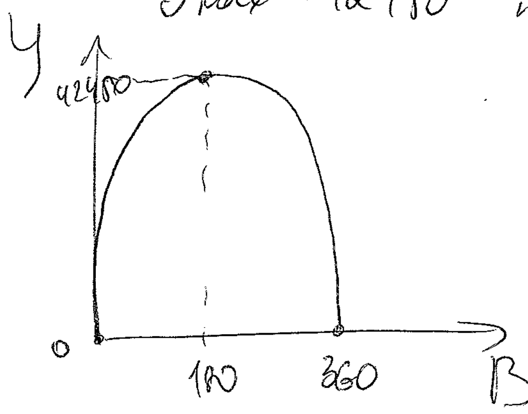
Это парабола отн. b_R, ветви вниз, max в вершине

$$b_R^* = \frac{187,5}{2 \cdot 0,9375} = 100 \Rightarrow b_L^* = 80$$

$Y_{max} = 42450$ при $B = 180$. при $B = 0$ $Y = 0$
при $B = 360$ $Y = 0$ — все не посещ.

При этом $Y(B)$ — парабола

$$\boxed{Y = 42450 - (B - 180)^2}$$



$$50 b_L + 180 b_R \le 42450 - (b_L + b_R - 180)^2$$

неверная ГПВ $b_L = 121$ $b_R = 121$