Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников – 2019 г.

Демонстрационный вариант и методические рекомендации по направлению «Теория игр»

Профиль: «Теория игр» **КОД - 390**

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите все задачи.
Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

.

1. (7 баллов) Чем хуже, тем лучше?

Пусть Γ — некая игра в нормальной форме с двумя или более игроками и конечными множествами чистых стратегий. Игра Γ' получена из игры Γ уменьшением выигрышей первого игрока при некоторых профилях стратегий. Может ли быть так, что в каждом равновесии по Нэшу игры Γ' выигрыш *каждого* игрока *больше*, чем в каждом из равновесий по Нэшу игры Γ? Обоснуйте свой ответ.

(7 points) The worse, the better?

Let Γ be the game in the normal form with two or more players and a finite set of pure strategies for each player. The game Γ' is a modification of Γ, it is made by decreasing of player 1's gains at some strategy profiles. Is it possible that in every Nash equilibrium in Γ' the gain of every player is higher than in every Nash equilibrium in Γ? Explain your answer.

2. (13 баллов) Дерево нормальной формы

При анализе последовательной игры двух игроков, данной в виде дерева, иногда возникает задача представить ее в нормальной форме, то есть в виде таблицы, в которой строки соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы — стратегиям второго.

Рассмотрим обратную задачу: пусть нам дана нормальная форма игры, например, представленная ниже:

$\Gamma=$

0,2	3,4	2,0	1,-1
1,1	0,0	1,1	1,2
0,2	3,0	1,1	1,2
1,1	5,0	0,3	3,1

Существует ли *последовательная игра с совершенной информацией* такая, что ее нормальной формой является Γ? Найдите дерево такой игры или докажите, что такой игры не существует.

(13 points) The tree of the normal game

In the analysis of sequential games with two players in the extensive form (the game tree), the standard problem is to construct the corresponding game in the normal form, i.e. to find the matrix in which the rows are the strategies of player 1 and the columns are the strategies of player 2. Consider the inverse problem: assume we have the game in the normal form with the matrix below

$\Gamma=$

0,2	3,4	2,0	1,-1
1,1	0,0	1,1	1,2
0,2	3,0	1,1	1,2
1,1	5,0	0,3	3,1

Does there exist a sequential game with perfect information such that Γ is its normal form? Find the tree of this game or prove that it does not exist.

3. (20 баллов) Задача о министерствах

Три партии А, Б, В прошли в парламент, набрав 40%, 35% и 25% соответственно, и начинают делить 21 министерский портфель между собой. Министерства имеют одинаковую ценность, и каждая партия хочет получить как можно больше портфелей.

Закон предписывает следующий порядок распределения портфелей: на первом этапе партия, набравшая максимальное количество голосов, предлагает изначальный дележ (называемый статус-кво). На втором этапе проходит однократная демократическая процедура: случайным образом выбранная партия (вероятность быть выбранной у каждой партии равна 1/3) предлагает свой дележ портфелей, который выставляется на всеобщее голосование и принимается простым большинством голосов. Предлагающая партия также участвует в голосовании.

Если предложенный дележ не принимается, то в силу вступает статус-кво. Если партия индифферентна на этапе голосования, то она голосует «за», а если на этапе предложения дележа партия безразлична к выбору между некоторыми дележами, то она предлагает все такие дележи равновероятно.

Какой статус-кво выбрать партии А? Сколько в среднем портфелей получит каждая партия?

(20 points) The problem of the ministries.

Three parties A, B, C form the parliament, gaining 40%, 35% and 25%, respectively, and begin to divide 21 ministerial portfolios among themselves. Ministries have the same value, and each party wants to get as many portfolios as possible.

The law prescribes the following order for the distribution of portfolios: in the first stage, the party that receives the maximum number of votes proposes an initial division (called the status quo). At the second stage, a one-period democratic procedure takes place: a randomly selected party (the probability of being selected for each party is equal to 1/3) offers its own division of portfolios, which is put to the public vote and is adopted by simple majority of votes. The proposing party also participates in the voting.

If the proposed division is not accepted, then the status quo comes into effect. If a party is indifferent at the stage of voting, then it votes “for”, and if at the stage of the proposal of a division the party is indifferent to the choice between some divisions, then it offers all such divisions equally likely.

What the status quo should party A choose? How many portfolios on average will each party get?

4. (25 баллов) О пользе сжигания денег

В первом периоде на рынке джентельменских наборов присутствует только фирма — Старожил. Во втором периоде на рынок входит Новичок, и Старожил не может этому помешать. Предвидя появление Новичка, Старожил хочет минимизировать свои потери, взяв на себя хитрое обязательство.

До выбора объема производства Q в первом периоде Старожил может выступить с публичным обещанием следующего содержания: «если произойдет некое событие A, я сожгу M рублей». Производители джентельменских наборов очень дорожат своей репутацией и не нарушают обещаний ни за какие деньги.

Для обеих фирм затраты на производство равны нулю, а цена на джентельменский набор в каждом из периодов равна P=1-Q, где Q — общее количество произведенных наборов на рынке.

После входа на рынок Новичка, обе фирмы одновременно выбирают объемы производства. Старожил максимизирует свою суммарную прибыль в двух периодах.

(а) (10 баллов) Выгодно ли Старожилу обещание сжечь деньги, если событие A — «мой выпуск в первом и втором периоде различны»? Если да, как много дополнительной прибыли оно может принести? При ответе считайте, что M достаточно велико.

(б) (15 баллов) Найдите оптимальное для Старожила обязательство (A,M), где A — *произвольное* событие, которое формулируется в терминах объемов производства фирм и цены на рынке в двух периодах. Сколько дополнительной прибыли оно принесет Старожилу?

(25 points) On the benefit of burning money

In the first period in the market of "gentleman's sets" there is only one company - the Old-Timer. In the second period, the Newbie enters the market, and the Old-Timer cannot prevent this. Anticipating the emergence of a newbie, the Old-Timer wants to minimize his losses by making a tricky commitment.

Before choosing the volume of production Q in the first period, the Old-Timer can make a public commitment of the following: “if an event A happens, I will burn M rubles”. Manufacturers of gentleman's sets value their reputation very much and do not break commitment for any money.

For both firms, the cost of production is zero, and the price for a gentleman's set in each of the periods is P = 1-Q, where Q is the total number of sets produced in the market.

After entering the market, both firms simultaneously select production volumes. An Old-Timer maximizes its total profit in two periods.

(a) (10 points) Does the Old-Timer benefit from a commitment to burn money if Event A is “my volume in the first and second period are different”? If so, how much additional profit can it bring? When answering, assume that M is large enough.

(b) (15 points) Find the optimal commitment for the Old-Timer (A, M), where A is an arbitrary event that is formulated in terms of the volumes of production and prices on the market in two periods. How much additional profit will it bring to the Old-Timer?

5. (10 баллов) Задача о добрых, но жадных организаторах

Организаторы Олимпиады, будучи людьми добрыми, готовы подарить участникам дополнительные баллы просто так. Участники пишут любое количество баллов (натуральное число), которое хотят получить. Однако, будучи людьми экономными (а не жадными, как может показаться), собрав ответы со всех участников Олимпиады, организаторы поступят следующим образом: они разделят все запросы на группы по количеству запрошенных баллов, посчитают сумму запрошенных баллов в каждой группе, и дадут запрошенные баллы тем, в чьей группе эта сумма будет наименьшей среди всех групп. Если таких групп будет несколько, баллы получит самая многочисленная. Найдите любое равновесие в этой игре с N=7 участниками.

(10 points) The problem of kind, but greedy organizers

The organizers of the Olympiad, being kind people, are ready to give participants additional points just like that. Participants write any number of points (natural number) they want to receive. However, being thrifty people (and not greedy, as it may seem), after collecting answers from all participants of the Olympiad, the organizers will do the following: they will divide all requests into groups according to the number of points requested, calculate the total amount of points requested by each group, and give the requested points to those participants in whose group this amount will be the smallest among all groups. If there are several such groups, the most numerous will receive points. Find any equilibrium in this game with N = 7 participants.

6. (25 баллов) Задача о точках на прямой

На прямой расставлены фишки двух цветов: n синих и n красных, причем расстояния между любыми двумя фишками различные.

Алиса и Боб по очереди берут по одной фишке, каждый берет фишки только одного цвета. Начинает Алиса, она имеет возможность выбрать свой цвет фишек. Пускай она берет красную фишку К1. Дальше Боб берет фишку синего цвета С1. Дальше Алиса должна

выбрать такую фишку К2, чтобы она была ближе к фишке Боба С1, чем ее предыдущая фишка К1. Затем Боб выбирает С2 так, что расстояние от нее до К2 меньше чем от К2 до С1. Они продолжают набирать фишки таким образом, что каждая следующая выбранная фишка должна быть ближе к последней фишке оппонента чем предыдущая. Проигрывает тот, кто первым оказывается не в состоянии сделать ход.
Кто победит в этой игре?

(25 points) Problem on the points on a line
Chips of two colors are placed on a straight line: n blue chips and n red chips, and the distances between any two chips are different.
Alice and Bob take chips in rotation, each taking only one chip per step. Alice starts, she has the opportunity to choose the color of her chips. Let her take the red chip R1. Then Bob takes a blue chip B1. Further, Alice should choose such a R2 chip so that she is closer to the Bob's B1 chip than her previous R1 chip. Then Bob chooses B2 so that the distance from it to R2 is less than from R2 to B1. They continue to take chips in such a way that each next chosen chip should be closer to the opponent’s last chip than the previous one. The one who first fails to make a move loses.
Who will win this game?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Общие комментарии

Олимпиадное задание включает задачи по теории игр, причем некоторые пункты олимпиадного задания могут носить междисциплинарный характер (например, связаны с некоторыми вопросами экономики, политологии, социологии, математических и компьютерных наук). При этом вся необходимая для понимания условия информация приводится в тексте задания.

Для успешного решения задач необходимо обладать навыками формализации модели на основе вербального описания теоретико-игровой ситуации, графического и формального — математического — анализа модели и интуитивного объяснения полученных результатов/наблюдаемых явлений и/или связей между ними.

Критерии оценивания

Олимпиадное задание включает 6 задач. Вес каждой задачи и ее подпункта указан в задании. Общая сумма составляет 100 баллов.

Правила выполнения

Задание составлено на русском и английском языке, решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.

Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым

Все шаги решения должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.

Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик. Если приведенное решение является неверным, участник его перечеркивает (перечеркнутое решение не проверяется) и приводит корректную версию.

При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, и апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Тематика заданий

Олимпиадные задания могут включать задачи по следующим темам:

- Игры в нормальной форме. Игры в развернутой форме. Стратегические взаимодействия. Чистые и смешанные стратегии.

- Строгое и слабое доминирование. Исключение доминируемых стратегий. Равновесие в доминантных стратегиях.
- Равновесие Нэша в чистых и смешанных стратегиях. Алгоритмы поиска.
- Антагонистические игры. Минимакс и максимин.
- Дилемма заключенного, олигополии, модель Хотеллинга. Другие классические модельные игры.
- Игры в развернутой форме: стратегии, конечные и бесконечные игры, дисконтирование. Обратная индукция. Равновесие, совершенное на подыграх.
- Повторяющиеся игры. Модели дележа. Сговоры.
- Игры с несовершенной информацией. Последовательные равновесия.
- Игры с неполной информацией. Байесовы игры.
- Стабильные мэтчинги. Алгоритм Гейла-Шэпли. Манипулирование.
- Кооперативные игры. Решение Нэша. Дележи. С-ядро. Вектор Шэпли. Задачи распределения ресурсов.
- Игры на сетях.

Обращаем внимание, что олимпиадное задание не обязано воспроизводить тематику заданий из демонстрационной версии, а может включать любые вопросы по перечисленным выше темам.

Литература для подготовки

- А.В. Захаров, *Теория игр в общественных науках,* Москва 2015.
- В.И.Данилов *Лекции по теории игр.* Москва. РЭШ, 2002.
- M.Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2009
- D.Fudenberg, J.Tirole *Game Theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991
- M.Osborne, A.Rubinstein *A Course in Game Theory*, MIT Press, 1994
- R.Gibbons *Game Theory for Applied Economists,* Princeton University Press, 1992
- R. Myerson *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, 1991
- K.G. Binmore *Playing for Real: A Text on Game Theory*, Oxford University Press, 2007.
- A.MasCollel, M.Whinston, J.Green, *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, 1995.
- D. Kreps, *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, 1990.
- D. Kreps, *Game Theory and Economic Modelling*, Clarendon Press, 1990.
- Th. Schelling, *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, 1981.
- Karlin, A. R., Peres, Y. *Game theory, alive* (Vol. 101). American Mathematical Soc, 2017.
- Maschler, M., Solan, E., Zamir, S. Game Theory (Translated from the Hebrew by Ziv Hellman and edited by Mike Borns), 2013.

Также рекомендуем прослушать видеокурсы Д.Дагаева и А.Савватеева на онлайн платформах.