

**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2019 г.**  
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**  
**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

**Время выполнения задания — 240 мин.**

Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

**Time to complete the task is 240 min.**

Solutions should be written in English or Russian language. Each problem costs 10 points, the maximum sum equals to 100 points.

**ОБЩАЯ ЧАСТЬ / GENERAL SECTION**

1. Найти предел последовательности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 n^2}.$$

1. Find the limit:

2. Сколько существует натуральных чисел  $n$  таких, что  $a_n$  нацело делится на 5?

2. Find all natural numbers  $n$  such that  $a_n$  is exactly divisible by 5?

$$a_n = 3^{2n+1} - 3^{n+1} + 4.$$

3. Случайная величина  $x$  распределена нормально с параметрами  $(0, \sigma)$ , где  $\sigma$  - среднеквадратическое отклонение. Найдите дисперсию случайной величины  $y = x^4$ .

3. A random variable  $x$  is normally distributed with mean 0 and standard deviation  $\sigma$ . Find variance of a random variable  $y = x^4$ .

4. Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, . . . , 9 (можно с повторениями) таблицу  $3 \times 3$  так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 14?

4. How many ways exist to fill the table  $3 \times 3$  with numbers 0, 1, . . . , 9 (repetitions are possible) with a sum over each column and each row equal to 14.

5. Построив таблицы истинности соответствующих функций, выясните, эквивалентны ли формулы  $A$  и  $B$ :

5. Using truth tables for the respective functions, check the formulae  $A$  and  $B$  for equivalency:

$$A = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z)), B = \overline{y \rightarrow (x \vee z)};$$

**СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ / SPECIAL SECTION**

6. Пусть матрица  $A$  размера  $3 \times 3$  такова, что для любого вектора столбца  $v \in R^3$  вектора  $Av$  и  $v$  ортогональны. Доказать, что  $A^T + A = 0$ , где  $A^T$  - транспонированная матрица.

6. Given a matrix  $A 3 \times 3$  such that for an arbitrary column vector  $v \in R^3$  vectors  $Av$  and  $v$  are orthogonal, prove that  $A^T + A = 0$ , where  $A^T$  is the transposed matrix for  $A$ .

7. Слуга получил от императора задание надеть по одному кольцу на каждого из  $M$  карпов, обитающих в дворцовом пруду (считается, что до того как слуга приступил к работе ни на одном из карпе кольца не было, и кольца надеваются так надежно, что кольцо не может соскользнуть). Надев на карпа кольцо, слуга должен отпустить его обратно в пруд. Из-за слабого зрения он не может определить есть ли уже на карпе кольцо, пока не вытащит его на сушу. Найдите аналитическое выражение для математического ожидания числа карпов, которые слуга выловит до того, как впервые выловит первого карпа, на котором уже есть кольцо, если считается, что вероятность вылова для каждого из карпов одинакова и карп с кольцом не учитывается.

7. Emperor's servant is given the task of ringing each of  $M$  carps of a palace's pond. We assume that no carp had a ring before the servant starts working, and the rings cannot slip. The servant should release a carp into the pond after it receives its ring. Due to his weak eyesight, the servant is unable to determine whether a carp has a ring before he fishes it out. Find (analytically) mathematical expectation for the number of carps the servant will fish out before he firstly fishes out a carp with a ring, provided the probabilities to fish out a carp are equal, and the ringed carps are discarded.

8. Граф "волейбольная сетка" состоит из  $m$  рядов по  $n$  вершин в каждом. Соединены только соседние вершины в ряду или столбце. При каких  $m$  и  $n$  этот граф будет (а) двудольным; (б) содержать гамильтонов цикл?

8. A graph "a volleyball net" comprises  $m$  rows of  $n$  elements each. The vertices are linked if and only if they are neighbours either in row or in column. For which  $m$  and  $n$  this graph (a) is bipartite; (b) contains Hamiltonian cycle?

**Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»**

**Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников — 2019 г.**

**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**

**Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»**

- 9.** (a) Дан числовой массив длины  $n$ . Предложите алгоритм, находящий максимальное значение сумм отрезков этого массива. Оцените число операций (обращения к элементам массива, сравнения, арифметических операций и др.) и объём дополнительной памяти, требуемой для работы алгоритма. (b) Оптимизируйте алгоритм таким образом, чтобы он работал за  $O(n)$  операций и требовал  $O(1)$  дополнительной памяти.
- 9.** For a given array of length  $n$ , propose algorithm that finds the maximum value of the sums of its intervals. (a) What are the estimated number of operations (use of array elements, arithmetical operations, comparisons and so on) and estimated required memory? (b) Improve the algorithm in such a manner that the estimated number of operations is about  $O(n)$  and estimated memory about  $O(1)$ .
- 10.** Даны две выборки  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  ( $n > 10000$ ) из нормальных распределений с неизвестными математическими ожиданиями  $m_x$  и  $m_y$  и соответственно. Пусть также оба распределения имеют известную и одинаковую дисперсию. Известно, что гипотеза " $m_x = m_y$ " была отвергнута против одной из альтернатив " $m_x > m_y$ " или " $m_x < m_y$ " на уровне значимости 5%. Верно ли, что гипотеза " $m_x = m_y$ " против альтернативы " $m_x \neq m_y$ " будет отвергнута на уровне значимости 5%? Ответ объясните.
- 10.**  $x_1, \dots, x_n$  and  $y_1, \dots, y_n$  ( $n > 10000$ ) are samples generated by two normally distributed random variables with unknown mathematical expectations,  $m_x$  and  $m_y$ , and known variances, which are equal. Given the hypothesis  $m_x = m_y$  has been rejected against " $m_x > m_y$ " or " $m_x < m_y$ " with 5 percent significance level, whether the hypothesis " $m_x = m_y$ " against " $m_x \neq m_y$ " can be rejected with the same significance level. Explain your answer.